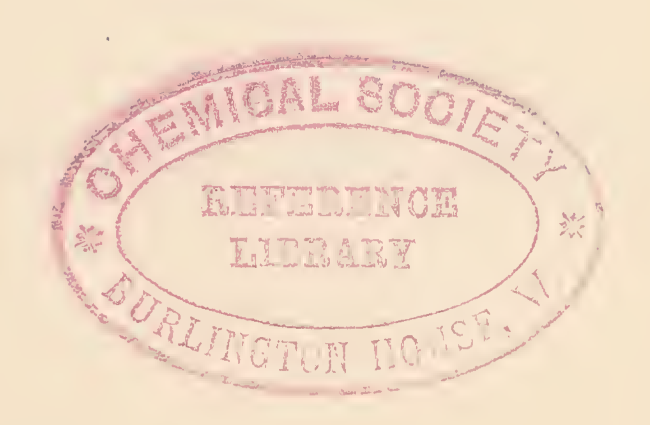






Repertorium der Physik.

Enthaltend

eine vollständige Zusammenstellung der neuern Fortschritte dieser Wissenschaft.

Unter Mitwirkung der Herren

Broch, Lejeune-Dirichlet, Minding, Mahlmann, Moser, Radicke, Riess, Röber, Strehlke

herausgegeben

von

HEINR. WILH. DOVE.

V. Band.

Mechanik. Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung. Literatur des Magnetismus und der Elektricität. Ueber das Auge.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin:

Verlag von Veit & Comp.

1844.

Inhaltsverzeichniss zum fünften Bande.

Dreizehnter Abschnitt.

Mechanik v. Minding.

Vierzehnter Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung v. Broch.

Funfzehnter Abschnitt.

Literatur des Magnetismus und der Elektricität

von H. W. Dove.

Sechszehnter Abschnitt.

Ueber das Auge v. L. Moser.

Dreizehnter Abschnitt.

Mechanik,

bearbeitet von

Ferdinand Minding.

---

1. Allgemeine Statik.

Bekanntlich lassen sich alle Entwickelungen der Statik auf den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten als gemeinschaftliches Princip zurückführen. Bezeichnet P die Intensität einer Kraft, ds eine beliebige unendlich kleine Verrückung ihres Angriffspunctes, welche jedoch mit den Bedingungen verträglich sein muss, denen die Lage desselben unterworfen ist; heisst ferner Θ der Winkel zwischen den Richtungen von P und ds, so ist $P \cos. \Theta \, ds$ das Product aus der Kraft in die Projection der Verrückung des Punctes auf die Richtung der Kraft, oder auch das Product aus der Verrückung des Punctes in die ihrer Richtung parallele Componente der Kraft, welches Product das virtuelle Moment der Kraft P genannt wird. Dasselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel Θ spitz oder stumpf ist, oder je nachdem die Fortrückung nach der Richtung der Kraft in dem Sinne der Kraft oder diesem entgegen geschieht. Nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten muss, für das Gleichgewicht eines Systems, die Summe der virtuellen Momente für jede virtuelle Verrückung der Puncte gleich Null sein. Diese gewöhnliche Aussage ist hinreichend, wenn zwischen den Coordinaten der Puncte Bedingungsgleichungen Statt finden, die auf keine Weise verletzt werden dürfen, also wenn die Puncte genöthigt sind, auf gewissen Flächen zu bleiben, die entweder unmittelbar gegeben sind, oder die man aus den Bedingungsgleichungen des Systems erhält, wenn man in diesen nur die Coordinaten eines Punctes als veränderlich betrachtet. Um auch sogleich solche Fälle zu umfassen, in welchen Puncte nur auf gegebenen Flächen so liegen, dass sie sich von ihnen nach einer Seite entfernen können, drückt Gauss den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten so aus, das die Summe der virtuellen Momente, für jede zulässige

virtuelle Bewegung, für das Gleichgewicht gleich Null oder negativ sein muss, also nie einen positiven Werth erhalten darf. In der That ist, wenn ein Punct auf einer Fläche liegt, von welcher er sich nach einer Seite in der Richtung der Normale entfernen kann, das virtuelle Moment des Widerstandes der Fläche, für eine Verrückung des Punctes in der Richtung der Normale, offenbar positiv, weil die Verrückung nur in dem Sinne des normalen Widerstandes geschehen kann; und da es in Verbindung mit den virtuellen Momenten der übrigen auf den Punct wirkenden Kräfte die Summe Null geben muss, wenn der Punct im Gleichgewicht sein soll, so muss für diese normale Verrückung die Summe der virtuellen Momente der übrigen Kräfte negativ sein; eine Bemerkung, welche sich leicht auf ein System übertragen lässt und dadurch den obigen Ausdruck liefert.

Im 4ten Bande des Crelleschen Journals für Math. (S. 232.) hat Gaus das Grundprincip der Mechanik in einer neuen Form dargestellt, welche unmittelbar die Bewegung wie das Gleichgewicht umfasst, nämlich in folgender: Die Bewegung eines Systemes irgendwie mit einander verbundener Puncte geschieht in jedem Augenblicke in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punctes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.

Sind nämlich $m, m', m'', \ldots$ die Massen der Puncte; $a, a', a'', \ldots$ ihre Orte zur Zeit t; $b, b', b'', \ldots$ die Orte, welche sie nach der unendlich kleinen Zeit dt in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären; so werden die wirklichen Orte $c, c', c'', \ldots$ diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren, $m\,(bc)^2 + m'\,(b'c')^2 + m''\,(b''c'')^2 + \ldots$ ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall dieses allgemeinen Gesetzes, und die Bedingung dafür, dass $m\,(ab)^2 + m'\,(a'b')^2 + \ldots$ selbst ein Minimum sei, oder dass das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe der freien Bewegung der einzelnen Puncte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Die Ableitung dieses Princips aus dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten geschieht mit Hülfe des d'Alembertschen Princips auf folgende Weise:

Die auf den Punct *m* wirkende Kraft ist zusammengesetzt aus einer, die in Verbindung mit der zur Zeit t Statt habenden Geschwindigkeit und Richtung ihn in der Zeit dt von a nach c führt und einer zweiten, die ihn in derselben Zeit aus der Ruhe in c durch cb führen würde, wenn er frei wäre. Dasselbe gilt von den andern Puncten. Die Wirkung dieser zweiten Kräfte werden dadurch aufgehoben, dass die Puncte nicht frei sind, oder es müssen, nach d'Alemberts Princip, die Puncte m, m', .. des Systemes in c, c', c'', ... unter alleiniger Wirkung dieser Kräfte, vermöge der Bedingungen des Systemes, im Gleichgewichte sein. Denkt man sich daher die Puncte m, m', m'', ... aus c, c', c'', ... auf irgend eine mit den Bedingungen des Systems verträgliche Weise nach dem Orte $\gamma, \gamma', \gamma''$, ... verschoben, und sind ϑ, ϑ', .. die Winkel, welche $c\gamma, c\gamma'$, .. mit cb, c'b', ... einschliessen, so ist nach dem Gesetze der virtuellen Geschwindigkeiten $\Sigma m. cb. c\gamma. \cos. \vartheta$ entweder Null oder negativ. Da nun $\gamma b^2 = cb^2 + c\gamma^2 - 2\, cb.\, c\gamma. \cos. \vartheta$, so folgt hieraus, dass $\Sigma m. \gamma b^2 - \Sigma m. cb^2 = \Sigma m. c\gamma^2 - 2\Sigma m. cb. c\gamma. \cos. \vartheta$ immer positiv sein wird, also $\Sigma m. \gamma b^2$ immer grösser als $\Sigma m. cb^2$, d. i. dass $\Sigma m. cb^2$ ein Minimum sein wird; w. z. b. w.

So allgemein diese Principien sind, so trägt doch das Gesetz der virtuelleu Geschwindigkeiten seinen Beweis keinesweges in sich selbst, sondern es muss erst auf einfachere Grundlagen zurückgeführt werden. Diese bestehen in dem Parallelogramm der Kräfte und in dem Axiom von der Gleichheit zwischen Action und Reaction, au deren Verknüpfung der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten als allgemeinste Folgerung hervorgeht. Gewinnt man durch diesen eine allgemeine Methode, um die Probleme der Statik in Gleichung zu setzen, so verfährt man doch nicht weniger direct, wenn man diese Probleme, ohne jenen Satz anzuwenden, unmittelbar auf die genannten Grundlagen zurückführt. — Zu den wichtigsten Vereinfachungen, welche die Statik durch solche auf die einfachsten Gründe zurückgehenden Betrachtungen gewonnen hat, gehört die Einführung der Kräftepaare von Poinsot, welche, wenn sie auch nicht als ein neues Resultat, sondern nur als ein anderer Ausdruck für die Theorie der Momente anzusehen ist, doch durch ihre Angemessenheit die elementaren Untersuchun-

gen über das Gleichgewicht sehr erleichtert und zu einem hohen Grade geometrischer Anschaulichkeit erhebt. Eine nähere Angabe dieser Theorie wird man hier nicht erwarten, weil dieselbe schon zu den älteren Arbeiten gehört; es genügt, hierüber auf die *Elémens de Statique* von Poinsot zu verweisen, so wie auf einige andere Lehrbücher, in welche diese Theorie, nachdem sie lange keinen merklichen Eingang gefunden, erst in der neuesten Zeit übergegangen ist, namentlich auf das Lehrbuch der Statik von Möbius, Leipzig 1837 und auf das von mir herausgegebene Handbuch der theoretischen Mechanik, Berlin 1838.

Mit Hülfe dieser auf geometrische Anschauung gegründeten Betrachtungsweise hat Poinsot neuerlich das dynamische Problem der Drehung eines festen Körpers, auf welchen keine beschleunigenden Kräfte wirken, auf sehr elegante Weise behandelt. Seine Schrift: *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, *Paris* 1834, giebt jedoch nur den Gang und die Resultate der Untersuchung an; die Beweise muss der Leser selbst ergänzen.

Eine früher in die Statik nicht eingeführte Untersuchung gründet sich auf foldende Betrachtung. Wenn an den Puncten eines festen Systemes oder Körpers unveränderliche Kräfte haften, d. h. solche, die bei jeder Verschiebung des Körpers nach Richtung und Intensität ungeändert auf dieselben Angriffspuncte wirken; so hängt ihre Wirkung, welche der Theorie der Kräftepaare zufolge sich immer und nur auf eine Weise auf die einer einfachen Kraft und eines zu derselben senkrechten Paares zurückführen lässt, offenbar von den verschiedenen Stellungen ab, in welche der Körper durch seine Verschiebung gegen die Kräfte gebracht wird. Sind insbesondere die Kräfte parallel und ist ihre Mittelkraft nicht gerade Null, so haben sie bekanntlich für jede Stellung des Körpers eine einfache Resultante, welche den Körper beständig in einem festen Puncte, dem Mittelpuncte der parallelen Kräfte oder dem Schwerpuncte, trifft. Dieses einfache Resultat hat sich einer grossen Erweiterung fähig gezeigt, in Betreff deren ich auf die Statik von Möbius so wie auf mein Handbuch der Mechanik verweise, da hier nicht der Ort ist, auf den Gegenstand ausführlich zurückzukommen. Der Umstand, dass diese Untersuchung sich gleichzeitig zweien von einander ganz unabhängigen Bearbeitern der Statik, wenn auch unter verschiedenen Gesichtspuncten, dargeboten hat, spricht dafür, dass es sich dabei um eine folgerechte Entwickelung

der Principien dieser Wissenschaft, um eine theoretisch nothwendige Ergänzung ihres Systems handelte. In diesem Betrachte mag es gestattet sein, hier den Mittelpunct von Kräften in einer Ebene, als einen einfachen und bei verschiedenen Gelegenheiten anwendbaren Fall hervorzuheben.

Es seien P, P′, P″, ... beliebige Kräfte in einer Ebene, an einem System festverbundener Puncte angebracht, R die Intensität ihrer Resultante, welche nicht gleich Null sein soll, so hat man, die Axe der x der Richtung von R parallel nehmend und die Kräfte nach x und y zerlegend, zur Bestimmung der Intensität und der Lage von R folgende Gleichungen:

$$P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + \ldots = R$$
$$P \sin. \alpha + P' \cos. \alpha' + \ldots = O$$
$$P\,(y \cos. \alpha - x \sin. \alpha) + P'\,(y \cos. \alpha' - x' \sin. \alpha') + \ldots = R\,\eta$$

wenn ξ und η die Coordinaten irgend eines Punctes in der Richtung der Resultante bezeichnen. ξ fällt aus obiger Gleichung weg, weil R der Axe x parallel ist. Sind ferner u, v neue rechtwinkliche Coordinaten aus demselben Anfange, und φ die Neigung von u gegen x, so hat man $x = u \cos. \varphi + v \sin. \varphi$, $y = -u \sin. \varphi + v \cos. \varphi$, und wenn ξ' und η' die Coordinaten im zweiten System für einen Punct der Resultante bezeichnen, auch $\eta = -\xi' \sin. \varphi + \eta' \cos. \varphi$; folglich:

$$R\,(\eta' \cos. \varphi - \xi' \sin. \varphi) = P\,[v \cos. (\varphi + \alpha) - u \sin. (\varphi + \alpha)] + P'\,[v' \cos. (\varphi + \alpha') - u' \sin. (\varphi + \alpha')] + \ldots$$

Denkt man sich die Axen u und v in dem System der Puncte fest, und dreht man dieses, zugleich mit jenen, um den Anfang der Coordinaten, während die Axen x y in der Ebene ungeändert bleiben, so entspricht jeder Lage des Systemes ein bestimmter Werth von φ, und die vorstehende Gleichung giebt für jede Lage des Systemes die Lage der Resultante in demselben an. Ihre Form lehrt sogleich, dass sich die Coordinaten eines Punctes in der Resultante finden lassen, welche ihr unabhängig von φ Genüge leisten; man erhält dieselben ohne alle Rechnung, wenn man $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, nämlich:

$$R\,\xi' = P\,(v \sin. \alpha + u \cos. \alpha) + P'(v' \sin. \alpha' + u' \cos. \alpha') + \ldots$$
$$R\,\eta' = P\,(v \cos. \alpha - u \sin. \alpha) + P'\,(v' \cos. \alpha' - u' \sin. \alpha') + \ldots$$

Jede Resultante trifft also das System in dem bestimmten Punct, dessen Coordinaten ξ' und η' durch vorstehende Gleichun-

gen gegeben sind, oder bringt man an diesem Puncte (dem Mittelpuncte der Kräfte $P, P', P'', \ldots$) eine der Resultante gerade gleiche und entgegengesetzte Kraft an, so entsteht ein Gleichgewicht, welches durch beliebige Verschiebung des Systems der Angriffspuncte nicht gestört wird.

Anstatt das System der Angriffspuncte zu drehen, kann man dasselbe auch unbeweglich lassen, und alsdann die Kräfte ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte drehen. Diese Bemerkung führt auf folgende Construction: Es seien P und Q zwei Kräfte in einer Ebene, A und B ihre Angriffspunte; man verlängere die Richtungen von P und Q bis zu ihrem Durchschnitte C (Fig. 1. Taf. 1.) und ziehe aus C die Resultante R, lege durch die Puncte A, B, C einen Kreis, welcher die (verlängerte) Richtung von R in M schneide, so ist M der Mittelpunct von P und Q. Denn indem sich P und Q drehen, durchläuft die Spitze des unveränderlichen Winkels C einen Kreis, und die Resultante R theilt den Winkel A C B, folglich auch den Bogen A M B, in zwei unveränderliche Theile, und geht mithin durch den festen Punct M. In Hinsicht der Lage dieses Punctes ist noch zu bemerken, dass, wenn man die Sehnen MA, MB zieht, die Seiten des Dreiekes AMB sich verhalten, wie die an der Spitze ihrer Gegenwinkel angebrachten Kräfte, nämlich $AM : MB : BA = Q : P : R$. Diese Proportion besteht auch fort, wenn die Kräfte einander parallel gedacht werden, wobei deu Mittelpunct M in die gerade Linie AB oder in deren Verlängerung rückt. Nur wenn $R = 0$ ist, also die Kräfte P und Q einander gerade gleich, parallel und entgegengesetzt sind, mithin ein Paar bilden, haben sie keinen Mittelpunct.

Durch Einführung dieses Mittelpunctes in die Elemente der Statik wird die bisher gewöhnliche besondere Hervorhebung der parallelen Kräfte unnöthig gemacht, und die Betrachtung unmittelbar auf die beiden Hauptfälle hingeleitet, welche allein einen wesentlichen Unterschied darbieten, je nachdem nämlich, bei zwei in einer Ebene befindlichen Kräften, die Mittelkraft R nicht Null und mithin ein Mittelpunct vorhanden ist, oder $R = 0$ ist und die Kräfte ein Paar bilden.

Denkt man sich allgemein im Raume an den Puncten eines Körpers unveränderliche Kräfte angebracht, so ist unter einem Mittelpuncte dieser Kräfte ein solcher Punct des Körpers zu

verstehen, durch welchen die Resultante beständig geht, wenn der Körper in eine stetige Folge verschiedener Lagen gebracht wird. Es geht aus dieser Erklärung schon hervor, dass ein Mittelpunct nur vorhanden ist, sobald eine einfache Resultante Statt findet; wenn aber die Mittelkraft der auf den Körper wirkenden Kräfte nicht Null ist, so giebt es immer unzählige Lagen des Körpers, in welchen die Kräfte eine einfache Resultante haben. Für jede solche Lage ergeben sich in der Richtung der Resultante zwei Mittelpuncte; nämlich wenn der Körper um eine bestimmte durch einen dieser Puncte gelegte Axe gedreht wird, so besteht die vorige einfache Resultante unabänderlich fort, und trifft mithin, während sie im Allgemeinen dem Körper in verschiedenen Stellen begegnet, ihn zugleich fortwährend in demselben Mittelpuncte. Die Folge aller dieser Mittelpuncte bildet im Körper das System einer Ellipse und einer Hyperbel, welche in zwei gegeneinander senkrechten Ebenen so liegen, dass die Brennpuncte der einen in die Scheitel der andern fallen. Jede gerade Linie, welche einen Punct der Ellipse mit einem Puncte der Hyperbel verbindet, stellt die für eine gewisse zugehörige Stellung des Körpers stattfindende einfache Resultante dar; ihre Durchschnitte mit jenen beiden Curven sind die in dieser Resultante befindlichen Mittelpuncte, und die Tangenten jener Curven, in diesen Durchschnittspuncten, sind die Axen, um welche der Körper bei unveränderlich fortbestehender einfacher Resultante, gedreht werden kann. In Betreff der weiteren Ausführung dieses Gegenstandes muss auf die genannten Lehrbücher verwiesen werden.

Ueber das Gleichgewicht elastisch-biegsamer Fäden findet man in der Statik von Möbius eine lehrreiche und zugleich auf einfache Weise dargestellte Untersuchung. Derselbe Gegenstand ist auch in meinem Handbuche in manchen Puncten von der gewöhnlichen Weise abweichend behandelt. Die Anwendung dieser Theorie auf die Biegung elastischer Stäbe und das daraus herzuleitende Maas ihre Festigkeit findet man am vollständigsten bei Navier im Resumé des leçions données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Deuxième Edition. Paris 1833. 2 vol. 8. Die bei diesen Anwendungen gewöhnliche Annahme, dass gewisse Fasern und namentlich die, welche durch die Schwerpuncte der Querschnitte eines prismatischen oder cylindrischen

Stabes geht, in Folge der Biegung keine Spannung erleiden, und sich daher weder verlängern noch verkürzen, ist für kleine Biegungen völlig hinreichend; nach dem allgemeinen Gesetze der Spannung in der elastischen Curve ist jedoch die Spannung in jedem Elemente der mittlen Faser der nach der Richtung dieses Elementes wirkenden Componente der biegenden Kraft gleich; sie ist folglich von einem Elemente zum andern veränderlich, jedoch überall sehr klein, wenn die Richtungen der Elemente auf der Richtung der Kraft überall nahe senkrecht sind.

Den Einfluss der Schwere auf die Figur eines in zwei Puncten von gleicher Höhe aufgelegten Stabes hat Bessel in seiner die Einheit des preussischen Längenmaasses betreffenden Schrift, Seite 121 — 136, untersucht und für die Verkürzung des Abstandes zwischen den Endflächen eine Formel entwickelt, welche hier folgt. Es sei (Fig. 2.) der Staab CC', dessen Mitte A, Länge $CC' = 2l$, in zwei von den Enden gleich weit abstehenden Puncten B und B' wagerecht aufgelegt; die Länge $BC = B'C'$ sei $= a$, also $AB = l - a$. Man lege die Axe der x wagerecht durch die gerade über den Stützpuncten B und B' liegenden Puncte der Mittellinie des Stabes, so dass für diese $y = o$ sei; der Anfang der x sei in der Mitte zwischen diesen beiden Puncten; die y seien positiv nach oben. Wegen der Kleinheit der Biegung darf man bei Berechnung der Gestalt der Mittellinie die zweiten Potenzen von $\frac{dy}{dx}$ vernachlässigen, also $ds = dx$ und $s = x$ setzen, wobei der Bogen s in A anfängt; ferner ist auch die Krümmung im Puncte xy der Mittellinie $= \pm \frac{d^2y}{dx^2}$ zu setzen. Das Moment des Widerstandes gegen Biegung, bekanntlich der Krümmung umgekehrt proportional, ist daher $= \nu \frac{d^2y}{dx^2}$, wo ν eine von der Spannkraft und dem Querschnitte des Staabes abhängige Constante ist. Der Ausdruck $\nu \frac{d^2y}{dx^2}$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Widerstand gegen Biegung den vom Puncte xy bis zum Endpuncte reichenden Theil des Stabes abwärts oder aufwärts zu drehen strebt. Dieses vorausgesetzt, erhält man zunächst für das Gleichgewicht des Theiles AB, welcher sich als in A wagerecht eingeklemmt betrachten lässt, folgende Gleichung, in welcher μ das Gewicht der Längeneinheit des Stabes ist:

$$\nu \frac{d^2y}{dx^2} + \mu \int_x^l (x' - x)\, dx' - \mu l\, (l - a - x) = 0.$$

Das zweite Glied ist das Moment, in Bezug auf den Punct xy in AB, der zwischen ihm und C befindlichen Theile des Stabes; nämlich $\mu ds = \mu dx'$ ist das Gewicht eines solchen Theiles, dessen Abscisse x' ist und der mithin am Hebelarme $x' - x$ wirkt. Der Widerstand der Stütze in B ist gleich dem halben Gewicht des Stabes, also $= \mu l$, und wirkt aufwärts drehend am Hebelarme $l - a - x$. Vollzieht man die Integration, so kommt

$$-\nu \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{2}(x - l)^2 - \mu l\, (l - a - x) \text{ oder}$$

$$-\nu \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{2}\left\{ x^2 - l\,(l - 2a) \right\} \qquad 1.$$

Hieraus folgt durch Integration, da für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, und für $x = l - a$, $y = o$ sein muss:

$$-\nu \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{6}\left\{ x^3 - 3l\,(l - 2a)\, x \right\} \qquad 2.$$

$$-\nu y = \frac{\mu}{24}\left\{ x^2 - (l - a)^2 \right\}\left\{ x^2 + (l - a)^2 - 6l\,(l - 2a) \right\} \qquad 3.$$

Für den Theil BC ist

$$-\nu \frac{d^2y}{dx^2} = \mu \int_x^l (x' - x)\, dx' = \frac{\mu}{2}(x - l)^2 \qquad 4.$$

$$\text{folglich} \quad -\nu \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{6}\left\{ (x - l)^3 - C \right\} \qquad 5.$$

und $C = l\,(2l^2 - 6al + 3a^2)$, weil für $x = l - a$ die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus 5. und 2. gleich sein müssen. Endlich, da für $x = l - a$, $y = 0$ sein muss:

$$-\nu y = \frac{\mu}{24}\left\{ (x - l)^4 - a^4 - 4C\,(x - l + a) \right\} \qquad 6.$$

Die Verkürzung des Abstandes der Endpuncte ist =

$2\int_0^l \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right\} dx$; oder in hinreichender Annäherung = $\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$, wo für $\frac{dy}{dx}$ von $x = 0$ bis $x = l - a$ der Werth 2., von $x = l - a$ bis $x = l$ der Werth 5. gilt. Hieraus folgt, wenn noch $a = \gamma l$ gesetzt wird, die Verkürzung =

$$\frac{1}{360}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \left\{ \frac{136}{7} - 96\gamma + 120\gamma^2 + 40\gamma^3 - 120\gamma^4 + 42\gamma^5 + \gamma^6 \right\};$$

sie erlangt ihr Minimum, zufolge der Gleichung $0 = -96 + 240\gamma$

$+ 120\gamma^2 - 480\gamma^3 + 210\gamma^4 + 6\gamma^5$ für $\gamma = 0{,}44062$. Der Stab verkürzt sich also am wenigsten, wenn er um 0,22031 seiner ganzen Länge von den Endpuncten entfernt aufgelegt wird; diese kleinste Verkürzung ist $= \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \,.\, 0{,}0000836$; bei Auflegung der Endpuncte, also für $\gamma = 0$, beträgt die Verkürzung: $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \,.\, 0{,}0539683$. Anderweitige Ausführungen sind in der Abhandlung nachzusehen.

---

2. Allgemeine Sätze über Anziehungen nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung.

Die Berechnung der Anziehung, welche eine irgendwie im Raume vertheilte Masse, deren Elemente nach einem Gesetze der Entfernung anziehend wirken, auf einen gegebenen Punct ausübt, lässt sich bekanntlich auf die Bestimmung einer Function der Coordinaten dieses Punctes zurückführen, aus welcher sich, durch Differentiation nach diesen, die Componenten der Anziehung ergeben. Diese Function (von Gauss Potential genannt), ist das Integral des Ausdruckes für das virtuelle Moment der gesammten auf den Punct wirkenden Anziehung. Bezeichnet m ein Element der anziehenden Masse, $m \,.\, f(r)$ die von ihm auf den Punct O, in der Entfernung r, ausgeübte Anziehung, ds eine beliebige unendlich kleine Verrückung des angezogenen Punctes von O nach O′, durch welche die anfängliche Entfernung $mO = r$ in $mO' = r + dr$ übergeht, und welche mit der Richtung Om den Winkel $O'Om = \vartheta$ bildet, so ist $m.f(r) \,.\, \cos.\vartheta \,.\, ds$ das virtuelle Moment der Kraft $mf(r)$ an O. Bezeichnet man noch mit ε den Winkel OmO', so giebt das gleichnamige Dreieck folgende Gleichungen: $(r + dr) \sin.\varepsilon = ds.\sin.\vartheta$, und $(r + dr)\cos.\varepsilon + ds \cos.\vartheta = r$, welche sich für ein unendlich kleines ds, in $r\varepsilon = ds.\sin.\vartheta$, und $dr = - ds.\cos.\vartheta$ verwandeln; folglich ist $- m \,.\, f(r) \,.\, dr$ das virtuelle Moment der von m auf O ausgeübten Anziehung. Setzt man $-\int fr \,.\, dr = F(r)$, und $V = \Sigma m F(r)$, wo das Summenzeichen sich auf alle Theile der anziehenden Masse erstreckt, so ist V das Potential der anziehenden Masse für den Punct O, und wenn man mit R die Intensität der gesammten Anziehung, mit dp das Element der Richtung von R, also mit Rdp das virtuelle Moment von R, mit X,X,Z die Componenten von R nach x,y,z bezeichnet, so ist

$$dV = R\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$
$$\text{also } X = \frac{dV}{dx},\ Y = \frac{dV}{dy},\ Z = \frac{dV}{dz}.$$

Denkt man sich die Coordinaten x, y, z durch irgend drei andere veränderliche Grössen p, q, t ausgedrückt, so wird V eine Function von p, q, t. Nimmt man zwei dieser Grössen, q und t, als constant an, so sind x, y, z nur noch durch p veränderlich, und gehören mithin irgend einer Curve im Raume an, deren Bogen s sei. Alsdann ist s eine Function von p; es sei $s = f(p)$, also $ds = f'p\,.\,dp$. Nun ist $\frac{dV}{dp} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dp} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dp}$; folglich $\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \ldots = X \cos.\alpha + \ldots.$, wenn α, β, γ die Neigungen von ds gegen die Axen x, y, z sind; also ist $\frac{dV}{ds}$ die nach der Richtung von ds wirkende Componente der Anziehung.

Für eine dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionale Anziehung ist das Potential $V = \Sigma \frac{m}{r} = \Sigma \frac{m}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$, wo a, b, c die Coordinaten von m, und x, y, z die des angezogenen Punctes O sind. Liegt O in endlicher Entfernung von jedem Elemente der anziehenden Masse, so ist klar, dass sowohl V als auch seine Differential-Quotienten nach x, y, z endliche bestimmte Werthe erhalten. Man findet $\frac{dV}{dx} = \Sigma \frac{(a-x)m}{r^3}$, $\frac{d^2V}{dx^2} = \Sigma \left\{ \frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right\} m$, und ähnliche Ausdrücke für $\frac{dV}{dy}$ u. s. f., woraus sich ergiebt: $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$. Ist also ein beliebiger Raum mit anziehender Masse erfüllt, so gilt vorstehende Gleichung für das Potential jedes ausserhalb dieses Raumes liegenden Punctes. Sucht man dagegen das Potential für einen der anziehenden Masse selbst angehörigen Punct, so erhält r unter andern auch unendlich kleine Werthe, und man sieht nicht sogleich, ob auch alsdann dem Potentional und seinen obigen Ableitungen noch bestimmte Werthe zukommen. Durch Einführung von Polar-Coordinaten mittels der Gleichungen $a = x + r \sin.\psi$, $b = y + r \cos.\psi \sin.\varphi$, $c = z + r \cos.\psi \cos.\varphi$ ergiebt sich jedoch als Ausdruck eines unendlich kleinen Massen-Elementes, wenn k die Dichtigkeit bezeichnet, $m = kr^2\,dr.\cos.\psi d\varphi d\psi$; mithin

$V = \iiint k r dr . \cos. \psi d\varphi d\psi; \frac{dV}{dx} = \int \frac{(a-x)m}{r^3} = \iiint k \sin\psi \cos\psi dr d\varphi d\psi,$
woraus die Endlichkeit und Stetigkeit der Werthe von V und $\frac{dV}{dx}$ hervorgeht, in so fern die Dichtigkeit k überall als endlich vorausgesetzt wird. Die zweiten Ableitungen $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}, \frac{d^2V}{dz^2}$ bleiben ebenfalls überall noch endlich, ändern sich aber bei dem Uebergange aus dem äusseren in den inneren Raum nicht mehr stetig, und die obige Gleichung zwischen ihnen, welche für einen äusseren Punkt gilt, geht für einen inneren Punkt O in folgende über:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit in O ist, und vorausgesetzt wird, dass diese sich von O aus nach allen Seiten nach der Stetigkeit ändert. Man kann übrigens diese Gleichung als die allgemein gültige ansehen, in so fern für einen äusseren Punkt $k = 0$ ist. Den strengen Beweis dieser Sätze muss man in folgender Abhandlung nachsehen: Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte von C. F. Gauss; Leipzig, in der Weidmann'schen Buchhandlung, 1840. Auf eine minder strenge Weise ist man sonst zu diesem Resultate durch Betrachtung einer gleichmässig erfüllten Kugel gelangt. Es sei C ihr Mittelpunct, ϱ dessen Entfernung vom angezogenen Puncte O, r die Entfernung eines Elementes m der Kugel von C; ferner sei $\angle$ mCO $= \psi$, mithin die Entfernung mO $= \sqrt{\varrho^2 - 2r\varrho\cos\psi + r^2}$; endlich sei φ die Neigung der Ebene mCO gegen eine feste durch CO gelegte Ebene; so ist $m = k \sin. \psi d\varphi d\psi \cdot r^2 dr$ das Massenelement der Kugel, und weil die Dichte k constant ist, das Potential:

$$V = k \iiint \frac{\sin\psi d\varphi d\psi \cdot r^2 dr}{\sqrt{\varrho^2 - 2r\varrho\cos\psi + r^2}}.$$

Integrirt man von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ und von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$, so kommt $V = \frac{2\pi k}{\varrho}\int r dr \left(r + \varrho - \sqrt{(r-\varrho)^2}\right)$, wo die Integration noch von $r = 0$ bis $r = R =$ Halbmesser der Kugel auszudehnen und für die Quadratwurzel aus $(r - \varrho)^2$ jedesmal ihr positiver Werth zu setzen ist. Hiernach erhält man für einen ausserhalb der Kugel befindlichen Punct, also wenn $\varrho > R$, $V = \frac{4}{3}\frac{\pi k R^3}{\varrho}$; ist

aber $\varrho < R$, so ergiebt sich der Werth von $V = 2\pi k\,(R^2 - \frac{1}{3}\varrho^2)$. Da $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so folgt weiter, wenn hier blos der zweite für den inneren Punkt geltende Werth von V in Betracht gezogen wird, $\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}\pi kx$, $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4}{3}\pi k$, $\frac{dV}{dy} = -\frac{4}{3}\pi ky$, u. s. f., mithin $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi k$ für einen in der Kugel von der Dichte k befindlichen Punkt. Stellt nun V das Potential eines beliebig begrenzten und von anziehender Masse erfüllten Raumes für einen innerhalb liegenden Punkt O vor, von welchem aus die Dichte der Masse sich nach der Stetigkeit ändert, so beschreibe man um O als Mittelpunct eine Kugel von sehr kleinem Halbmesser, nenne V' das Potential ihrer Masse, und V'' das Potential der übrigen Masse für den Punct O, so ist $V = V' + V''$. Da für die zu V'' gehörige Masse O ein äusserer Punct ist, so hat man $\frac{d^2V''}{dx^2} + \ldots = 0$; gestattet mans ich ferner, die stetig veränderliche Dichtigkeit der um O beschriebenen Kugel, wegen der Kleinheit ihres Durchmessers, als constant zu betrachten, und demnach die vorstehenden Resultate darauf anzuwenden, so kommt $\frac{d^2V'}{dx^2} + \ldots = -4\pi k$, folglich $\frac{d^2V}{dx^2} + \ldots = -4\pi k$, wo k die Dichtigkeit in dem angezogenen Puncte O vorstellt.

In der genannten Abhandlung von Gauss dient die Untersuchung dieser Gegenstände nur als Vorbereitung zu weiter gehenden Untersuchungen über das Potential, von welchen ein Haupt-Resultat dieses ist, dass anstatt einer gegebenen Massenvertheilung im Innern eines überall begrenzten Raumes sich immer eine bloss auf die Oberfläche beschränkte Massenvertheilung setzen lässt, welche für alle Puncte der Oberfläche und des äusseren Raumes dasselbe Potential liefert, wie die ursprüngliche im Innern gegebene Masse. Ich will versuchen, das zum Beweie dieses Satzes Erforderliche aus der Abhandlung zusammen zu stellen, auf welche im Uebrigen verwiesen werden muss.

Diese Untersuchung geht, wie man aus Vorstehendem sieht, von der Annahme aus, dass eine Masse M auch blos an der Oberfläche eines Raumes vertheilt sein kann. Es stelle kds ein Element dieser Masse vor, welches über das Flächenelement ds verbreitet ist; k heisse die Dichtigkeit. Das Potential dieser auf der

Fläche vertheilten Masse für irgend einen Punkt O ist $\int \frac{kds}{r}$, wo $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$, und x, y, z die Coordinaten von O, a, b, c die von ds sind. Führt man Polar-Coordinaten ein, nämlich $a = x + r \cos.\varphi \cos.\psi$, $b = y + r \cos.\psi \sin.\varphi$, $c = z + r \sin\psi$, so wird $\frac{ds}{r} = d\varphi d\psi \sqrt{r^2 \cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 \cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$, woraus man sieht, dass das Potential einer Fläche für einen Punct O auch dann einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn O in der Fläche liegt, indem es von dem Divisor r befreit ist; und dass es sich nach der Stetigkeit ändert, wenn die Lage von O stetig geändert wird.

Setzt man $V = \int \frac{kds}{r}$, so ist im Allgemeinen $\frac{dV}{dx} = \int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}$. Dieses Integral erhält jedoch eine unbestimmte Form, und ist zur Darstellung des Werthes von $\frac{dV}{dx}$ nicht unmittelbar tauglich, wenn der Punct O in der Oberfläche liegt. Ist diese eine Kugelfläche vom Halbmesser R, und die Dichte k der über sie vertheilten Masse constant; so findet man zunächst $V = 4\pi k R$ für einen inneren Punkt O, hingegen $V = \frac{4\pi k R^2}{\varrho}$ für einen äusseren Punkt, wobei $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den Abstand des Mittelpunctes von O bezeichnet. (Der Beweis folgt nachher unter 2.) Hieraus ergiebt sich $\frac{dV}{dx} = 0$ für den innern Punct, dagegen $\frac{dV}{dx} = -\frac{4\pi k R^2 x}{\varrho^3}$ für den äusseren Punkt. Auf der Kugelfläche selbst werden beide Werthe zugleich gelten, je nach dem Zeichen von dx; gleich werden sie nur dann, wenn $x = 0$, $\sqrt{y^2 + z^2} = \pm R$, also wenn das Linear-Element dx auf der Oberfläche selbst liegt.

Allgemein erhalten die Ausdrücke $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, oder die nach den Axen x, y, z wirkenden Componenten der Anziehung, an der Oberfläche zwei verschiedene Werthe, je nachdem dx, dy, dz als positiv oder als negativ betrachtet werden; wenn jedoch das Element dx auf der Fläche liegt, so fallen beide Werthe von $\frac{dV}{dx}$ zusammen. Die nähere Untersuchung dieses Gegenstandes glaube ich hier übergehen und auf die §. 13 — 18 der Abhandlung verweisen zu dürfen. Im Folgenden kommen Ableitungen von Potentialen

nur unter Umständen vor, in welchen ihre Werthe sich ohne Zweideutigkeit ergeben.

1. Ein mehrfach zur Anwendung kommender Satz ist folgender: Es sei V das Potential von Massen M', M'', M''', . . die sich in den gleichnamigen Puncten befinden, und v das von Massen m', m'', m''', . . . die ebenfalls in den gleichnamigen Puncten sind; es seien V', V'', V''', . . . die Werthe von V in m', m'', m''', . . . und v', v'', v''', . . . die Werthe v in M', M'', M''', . . . so hat man

$$M'v' + M''v'' + M'''v''' + \ldots = m'V' + m''V'' + m'''V''' + \ldots.$$

oder $\Sigma Mv = \Sigma mV$; denn beide Summen sind $= \Sigma \frac{Mm}{r}$, wo M irgend eine der Massen M' M'' . . ., m eine der m' m'' . . . ist, r die Entfernung zwischen M und m bezeichnet, und das Σ sich auf alle mögliche Combinationen dieser Art bezieht.

2. Das Potential einer Kugelfläche vom Halbmesser R, auf welcher eine Masse mit constanter Dichtigkeit k vertheilt ist, für einen Punct O, dessen Entfernung vom Mittelpuncte gleich ϱ sei, findet sich aus dem oben für eine volle Kugel angegebenen Werth sofort, wenn man die letzte Integration nach r weglässt und $r = R$ setzt. Man erhält $V = k\int\frac{ds}{r} = \frac{2\pi kR}{\varrho}\left(R + \varrho - \sqrt{(R-\varrho)^2}\right)$, wo für die Quadratwurzel stets ihr positiver Werth gilt; also $V = 4\pi kR$ für einen innern Punct, hingegen $V = \frac{4\pi kR^2}{\varrho}$ für einen äusseren Punct; für die Oberfläche sind beide Werthe gleich. Eine Anwendung dieser beiden Sätze ist folgender

3. Lehrsatz. Es sei V das Potential von Massen, die sich theils im Innern, theils ausserhalb einer Kugelfläche befinden, für irgend ein Element dieser Fläche ds, so ist das Integral von Vds, über die ganze Kugelfläche ausgedehnt, nämlich

$$\int Vds = 4\pi\,(RM^0 + R^2V^0)$$

wenn M^0 die im Innern der Kugelfläche befindliche Masse, V^0 das Potential der ausserhalb liegenden Masse für den Mittelpunct der Kugel bedeutet. Massen in der Oberfläche können beliebig zu den innern oder äussern gerechnet werden.

Beweis. Da $V = \int\frac{dm}{r}$, wenn dm ein Element der vorgelegten Masse, r seine Entfernung von ds ist, und die Integration über die ganze Masse ausgedehnt wird, so ist $\int Vds = \int ds\int\frac{dm}{r} = \int dm\int\frac{ds}{r}$

nach dem Vorigen. Nun ist $\int \frac{ds}{r} = 4\pi R$ für ein im Innern der Kugelfläche liegendes Massenelement dm, hingegen $= \frac{4\pi R^2}{\varrho}$ für ein äusseres Element, also $\int V ds = 4\pi R M^0 + 4\pi R^2 \int \frac{dm}{\varrho}$, wo ϱ den Abstand des äussern Elementes dm vom Mittelpuncte, mithin $\int \frac{dm}{\varrho} = V^0$ des Potential aller äusseren Massen für den Mittelpunct ist; w. z. b. w.

4. Es sei P die Kraft, welche ein Massenpunct m auf das Element ds einer den zusammenhängenden endlichen Raum T begrenzenden Fläche in der Richtung der Normale ausübt, so hat man, wenn u die Neigung der nach innen gehenden Normale in ds gegen die von ds nach m gehende Gerade bezeichnet, $P = \frac{m \cos. u}{r^2}$. Beschreibt man um den Mittelpunct m eine Kugel vom Halbmesser $= 1$, nennt $d\Pi$ ein Flächenelement auf derselben, und sind ds', ds'', ... die Flächenelemente, welche die von der Spitze m ausgehende Pyramide, deren Grundfläche $d\Pi$, auf der Oberfläche von T abschneidet, so hat man, wenn der Punct m ausser dem Raume T liegt, so dass die Pyramide bei ds' in diesen eintritt, bei ds'' austritt, bei ds''' wieder ein- und bei ds^{IV} wieder austritt, u. s. f.

$$d\Pi = -\frac{ds' . \cos. u'}{r' r'} = +\frac{ds'' . \cos. u''}{r'' r''} = -\frac{ds''' . \cos. u'''}{r''' r'''} = \ldots$$

weil der Winkel u beim Eintreten stumpf, beim Austreten spitz ist und $d\Pi$ positiv genommen wird. Da nun die Anzahl der Orte des Ein- und Austretens der von m ausgehenden Pyramide für einen äussern Punct gerade ist, so ist hiernach die Summe $P' ds' + P'' ds'' + P''' ds''' \ldots$ auf alle diese Elemente erstrekt, Null, weil $P' = +\frac{m . \cos. u'}{r' r'}$, $P'' = +\frac{m . \cos. u''}{r'' r''}$ u. s. f.; folglich ist das Integral $\int P ds = 0$, wenn m ausserhalb des Raumes T liegt, und die Integration die ganze Oberfläche von T umfasst. Folglich ist auch $\int P ds = 0$, wenn P die normale Kraft ist, welche aus einer beliebig im äussern Raume vertheilten Masse entspringt.

Liegt der Punct m im Raume T, so hat man, wenn die von m ausgehende Pyramide von der Grundfläche $d\Pi$ in ds' austritt, in ds'' wieder ein- und in ds''' wieder austritt, u. s. f.,

$$d\Pi = +\frac{ds' . \cos u'}{r' r'} = -\frac{ds'' . \cos u''}{r'' r''} = +\frac{ds''' . \cos u'''}{r''' r'''} = \ldots$$

und mithin für alle diese Elemente, deren Anzahl ungerade ist, $P'ds' + P''ds'' + P'''ds''' \ldots = md\Pi$; folglich $\int Pds = 4\,m$, wenn die Integration die ganze Oberfläche von T umfasst. Dieser Werth gilt auch, wenn die Masse m im Innern nicht in einem Punct vereinigt, sondern beliebig darin vertheilt ist.

Liegt m gerade in der Oberfläche von T, so erhält man ebenfalls $\int Pds = \int md\Pi$, wo aber die Integration nur über die halbe Kugelfläche zu erstrecken ist, wenn nämlich die Oberfläche von T in dem Orte von m eine stetige Krümmung hat; alsdann ist $\int Pds = 2m\pi$, welches auch gilt, wenn die Masse m in der Oberfläche verbreitet ist.

5. Bezeichnet T einen endlichen Raum, der ganz ausserhalb eines mit Masse erfüllten Raumes liegt; V das Potential dieser Masse, ds ein Element der Oberfläche von T, p einen unbestimmten Theil der auf ds nach innen errichteten Normale, so ist $\frac{dV}{dp}$ für $p = 0$ die normale Componente der Anziehung in ds, oder einerlei mit dem vorigen P. Bezeichnet man noch mit q die Intensität der Anziehung jener Masse, in dem Orte irgend eines Elementes dT des endlichen Raumes T, so ist

$$\int V \frac{dV}{dp} ds = -\int q^2\ dT$$

wo die erste Integration die ganze Oberfläche des Raumes T, die zweite den ganzen Raum T umfasst.

Beweis. Es seien x, y, z die Coordinaten von dT, also das Element $dT = dxdydz$, so hat man

$$q^2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2. \text{ Ferner ist}$$

$$d\left(V\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2}, \text{ folglich}$$

$$\int \left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2}\right\} dx = -V'\frac{dV'}{dx'} + V''\frac{dV''}{dx''} - V'''\frac{dV'''}{dx'''} + \ldots$$

wenn die Integration nach x über alle Elemente des Raumes T ausgedehnt wird, welche zugleich dem über der Grundfläche dydz senkrecht errichteten Prisma angehören, und wenn $x', x'', x''', \ldots$ die Werthe von x sind, für welche dieses Prisma zuerst in den Raum T eintritt, dann wieder austritt, u. s. f. Bezeichnet man mit $\xi', \xi'', \ldots$ die Neigungen der innern Normalen der Oberfläche von T an diesen Stellen, gegen die Axe x, so ist $dydz = \cos.\xi'.\,ds'$

$= -\cos.\xi''\,ds''$ u. s. f.; daher ist $\iiint\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V\frac{d^2V}{dx^2}\right\} dx\,dy\,dz$
$= -\iint V\frac{dV}{dx}\cos.\xi.\,ds$, oder weil $\cos.\xi = \frac{dx}{dp}$, $\iiint\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\right.$
$\left. + V\frac{d^2V}{dx^2}\right\} dT = -\iint V\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dp}\,ds$, wo die dreifache Integration den Raum T, die zweifache seine Oberfläche umfasst. Da ähnliche Gleichungen für y und für z gelten, und da $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = o$ für jeden Punct des Raumes T, so erhält man durch Addition dieser drei Gleichungen:

$$\int q^2\,dT = -\int V\left(\frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dp} + \frac{dV}{dy}.\frac{dy}{dp} + \frac{dV}{dz}.\frac{dz}{dp}\right) ds$$
$$= -\int V\frac{dV}{dp}\,ds, \text{ w. z. b. w.}$$

Hieraus folgt:

Lehrsatz. Ist das Potential einer Masse, welche sich ganz ausserhalb eines geschlossenen endlichen Raumes T befindet, für alle Puncte der Oberfläche dieses Raumes constant $= A$, so ist es auch im Innern desselben constant und $= A$.

Da nämlich V für die Oberfläche constant ist, so ist $\int V\frac{dV}{dp}ds$ $= V\int\frac{dV}{dp}ds = 0$ nach 4., weil $\frac{dV}{dp} =$ den dortigen P; folglich $\int q^2\,dT = 0$; also ist $q^2 = 0$, also $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$, $\frac{dV}{dz} = 0$, überall im Raum T; und da sich V stetig ändert, so muss es in diesem Raum überall den Werth haben, den es an der Oberfläche hat.

6. Diese Resultate erleiden keine Aenderung, wenn einige der vorkommenden Massen anziehend, andere dagegen abstossend wirksam gedacht werden; man würde nur solche Massen durch entgegengesetzte Zeichen in der Rechnung zu unterscheiden haben. Die Vertheilung einer Masse in einem Raume, oder auf einer Fläche, heisst gleichartig, wenn alle Elemente derselben gleiche Zeichen haben, ungleichartig, wenn einige Elemente den übrigen entgegengesetzt sind. Die gesammte vertheilte Masse ist in jedem Falle gleich der algebraischen Summe aller Massenelemente, und kann also auch $= 0$ sein.

7. Eine Masse $M = \int m\,ds$ sei über eine Fläche gleichartig vertheilt; es sei $V = \int\frac{m\,ds}{r}$ ihr Potential für irgend einen in der

Fläche befindlichen Punct. Die Masse M kann man sich der Kürze wegen positiv denken; mithin sind es auch ihre Elemente mds. Bezeichnet man die grösste Entfernung zweier Puncte auf der Fläche von einander mit R, so ist offenbar $V > \frac{M}{R}$; folglich ist auch, wenn U irgend eine Grösse ist, die für jeden Punct der Fläche einen bestimmten endlichen und sich nach der Stetigkeit ändernden Werth hat, und wenn $-U$ in jedem Puncte der Fläche grösser als die Constante $-U'$, $V - 2U > \frac{M}{R} - 2U'$; daher ferner, wenn man auf beiden Seiten mit mds multiplicirt und über die Fläche integrirt, $\int(V - 2U)\,mds > \left(\frac{M}{R} - 2U'\right)M$; folglich hat das Integral $\Omega = \int(V - 2U)\,mds$ nothwendig, für eine gewisse gleichartige Vertheilung von M, einen kleinsten Werth.

Um diese gleichartige Vertheilung zu finden, für welche Ω ein Minimum wird, denke man sich im Elemente ds die Masse mds vertauscht mit $(m+\mu)\,ds$, so dass μds eine kleine Aenderung der Masse mds vorstellt, die positiv oder negativ sein kann; jedoch muss $m+\mu$ überall positiv sein, weil die Vertheilung gleichartig bleiben soll. Man erhält $\delta\Omega = \int\delta V \,.\, mds + \int(V - 2U)\,\mu ds$; und weil $\delta V = \int\frac{\mu ds}{r}$ ist, folglich $\int\delta V . mds = \int\mu ds \int\frac{mds}{r} = \int V\mu ds$ (nach 1.), so ist $\delta\Omega = 2\int(V - U)\,\mu ds$. Zugleich ist die Summe aller Aenderungen der Massen, nämlich $\int\mu ds = 0$, weil die Gesammtmasse $= M$ bleiben soll.

Damit $\delta\Omega$ nicht negativ werde, muss in dem belegten Theile der Fläche $V - U = W$ constant sein. Denn wäre W daselbst theilweise grösser, theilweise kleiner als A, so setze man μ negativ in einem Theile, wo $W > A$, und positiv in einem Theile wo $W < A$ und $\mu =$ Null in allen übrigen; alsdann wird offenbar $\delta\Omega = \int(W - A)\,\mu ds$ negativ; was nicht Statt finden kann, wenn Ω seinen kleinsten Werth hat. Wenn also die ganze Fläche belegt ist, so ist auch W in derselben überall $= A$. Sollte aber bei dem Minimum von Ω ein Flächentheil unbelegt bleiben, so kann in diesem nicht $W < A$ sein. Denn wäre an irgend einer unbelegten Stelle $W < A$, so belege man dieselbe mit positiven Massen μds, aus dem belegten Theile weggenommen; alsdann ist $\delta\Omega = \int(W - A)\,\mu ds$ offenbar negativ; denn für den zuerst belegten Theil war $W = A$,

und für den nachher belegten $W < A$, und μ positiv, für den unbelegten Theil aber, wo $W > A$ war, ist $\mu = 0$, weil er nicht belegt worden ist. Also wird alsdann $\delta\Omega$ negativ; was nicht zulässig ist.

Wenn daher bei gleichartiger Vertheilung von M das Minimum von Ω stattfindet, so ist in dem belegten Theile der Fläche die Differenz $V - U$ constant $= A$, in dem unbelegten Theile aber, wenn ein solcher vorhanden, $V - U = A$ oder $> A$.

8. Das Potential V von Massen, die sämmtlich ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Theile dieses Raumes einen constanten Werth und in einem anderen Theile desselben einen verschiedenen Werth haben.

Denn es sei in dem masseleeren Raume A das Potential V überall $= a$, und in einem anderen an A grenzenden ebenfalls leeren Raume B sei überall $V > a$; so beschreibe man eine Kugel, wovon ein Theil in B, der übrige Theil aber nebst dem Mittelpuncte in A enthalten ist, welche Construction allemal möglich sein wird. Ist R der Halbmesser der Kugel, und ds ein Element ihrer Oberfläche, so ist $\int V ds = 4\pi R^2 a$ (nach 3., da alle Massen ausser der Kugel liegen, also $M^0 = 0$, und $V^0 = a$); folglich da $\int ds = 4\pi R^2$, so ist $\int (V - a)\, ds = 0$. Dies kann aber nicht sein, da in A, $V = a$, und in B, $V > a$ ist.

Eben so wenig kann das Potential in einem an A grenzenden Raume $< a$ sein. Offenbar aber müsste wenigstens einer dieser beiden Fälle Statt finden, wenn der Lehrsatz falsch wäre.

9. Lehrsatz. Wenn von Massen, welche sich blos in dem endlichen Raume T oder auch ganz oder theilweise auf dessen Oberfläche S stetig vertheilt befinden, d. h. so dass jedes Flächenelement nur mit einer unendlich kleinen Masse belegt ist, das Potential V in allen Puncten von S einen constanten Werth A hat; so wird das Potential in jedem Puncte O' des unendlichen äusseren Raumes T', wenn $A = 0$ ist, gleichfalls $= 0$ sein; wenn aber A nicht Null ist, so liegt das Potential in jedem Puncte von T' zwischen 0 und A.

Beweis. Man kann sich der Kürze wegen das Potential A positiv denken. Gesetzt nun in einem Puncte O' von T' wäre $V = B$ und $B > A$; so sei C eine Grösse zwischen A und B. Da V sich überall stetig ändert, so muss, wenn man von O' aus in

einer beliebigen Richtung gerade fortgeht, sich in dieser nothwendig ein Punct finden, wo $V = C$ wird; denn trifft die gezogene gerade Linie die Fläche des Raumes T, für welche $V = A$, in einem Puncte Q, so muss auf der geraden OQ irgendwo zwischen O und Q, $V = C$ werden, weil V von B nach A stetig sich ändert; trifft jene gerade Linie die Fläche nicht, so muss V für sehr entfernte Puncte derselben sich der Null nähern, also vorher ebenfalls $= C$ werden. Folglich kann man um O' eine in sich geschlossene Fläche legen, welche ganz ausserhalb der wirkenden Massen liegt, und auf welcher das Potential überall $= C$ ist. Folglich ist nach dem in 5. aufgestellten Lehrsatz, das Potential auch im Innern dieser Fläche constant, und kann also im Puncte O' nicht $= B$ oder grösser als C sein, wie vorausgesetzt wurde. Also kann das Potential in O' nicht grösser als A sein. — Dass ferner das Potential in O' nicht negativ sein kann, ergiebt sich ebenso, wenn man unter C eine negative, nämlich zwischen Null und dem angenommenen negativen Werthe B des Potentials in O' liegende Grösse versteht. Denn das Potential muss von B aus in jeder Richtung sich entweder A oder 0 nähern, folglich in jeder Richtung vorher den Werth C erreichen, welcher zwischen B und o und auch zwiscqen B und A liegt, da A positiv ist. Hieraus folgt das Uebrige, wie vorhin.

Insbesondere folgt, dass V, wenn sein Werth A in der Oberfläche S überall $= 0$ ist, auch im äussern Raume T' überall Null ist.

Ist aber A nicht Null, so kann V im äussern Raume nicht $= A$ und auch in keiner endlichen Entfernung von den wirkenden Massen $= 0$ sein. Denn es sei V in $O' = B$, so folgt wenn um O' eine Kugel beschrieben wird, deren Halbmesser R kleiner ist, als die kleinste Entfernung des Punctes O' von S, für die Oberfläche derselben $\int V ds = 4\pi R^2 B$, (nach 3.), also: $\int (V - B)\, ds = 0$. Wenn nun $B = 0$, so folgt $\int V ds = 0$, mithin, da V nirgend negativ ist, muss es überall auf der Kugel $=$ o sein; wäre $B = A$, so folgt, weil V überall nicht $> A$, dass V überall auf der Kugel $= A$ sein müsste. Folglich wäre V auch im Innern der Kugel überall $= 0$ oder $= A$, nach dem Lehrsatz in 5. Nach 8. müsste dann V im ganzen äusseren Raume $= 0$ oder $= A$ sein. Es kann aber in sehr entfernten Puncten nicht A sein, weil es sich dort der Null nähert, und A von Null verschieden ist. Es kann in der Nähe

der Oberfläche nicht = 0 sein, weil es in der Oberfläche = A ist und sich stetig ändert.

Also ist überall im äusseren Raume das Potential = 0, wenn es in der Oberfläche Null ist, liegt hingegen zwischen 0 und A, wenn es in der Oberfläche = A ist.

10. Im Artikel 7. setze man $U = 0$, so ist für das Minimum von $\int Vmds$, welches durch gleichartige Vertheilung der Masse M auf der Fläche sich bewirken lässt, nach dem Lehrsatze dieses Artikels, V in dem belegten Theile constant = A; in dem unbelegten Theile der Fläche, wenn es einen solchen gäbe, müsste $V = A$ oder $> A$ sein. Nach 9. muss aber V in dem unbelegten Theile $< A$ sein. Denn unter dem Raume T in 9. kann man den belegten Theil der Fläche verstehen, und ihren unbelegten Theil zum äusseren Raume T' rechnen; da nun das Potential in der Fläche von T überall = A ist, so liegt es in jedem Puncte des äusseren Raumes zwischen 0 und A.

Die Annahme, dass ein Theil der Fläche unbelegt bleibe, wenn $\int Vmds$ ein Minimum ist, führt also auf einen Widerspruch, wofern man nicht noch annimmt, dass der constante Werth A von V in dem belegten Theile der Fläche gerade Null sei. Alsdann aber wäre, nach dem vorigen Artikel, der Werth von V überall = 0; folglich auch, wenn dt ein beliebig auf der Fläche oder im Raume gedachtes Linear-Element bezeichnet, ist $\frac{dV}{dt} = 0$; also verschwindet jede Anziehung (oder Abstossung) der auf der Fläche vertheilten Masse M auf jeden Punct in der Fläche oder ausser ihr. Da die Vertheilung der Masse gleichartig ist, so ist einleuchtend, dass dieser Fall nicht stattfinden kann, ausgenommen wenn die Gesammtmasse $M = 0$, folglich auch die Dichtigkeit m in jedem Flächenelemente Null und mithin die ganze Fläche unbelegt wäre.

Also: Wenn eine Masse M auf der Fläche gleichartig so vertheilt ist, dass auf jedes Flächenelement ds das Massenelement mds kommt, und dass $\int Vmds$ ein Minimum wird, so bleibt kein Flächenstück unbelegt, und das Potential $V = \int \frac{mds}{r}$ hat auf der ganzen Fläche überall denselben Werth.

Zusatz. Diese Vertheilung ist nur auf eine Art möglich; denn denkt man sich eine zweite dasselbe leistende Vertheilung, in welcher die Dichtigkeit $m' = m + \mu$ an die Stelle von m tritt,

so wäre das Potential V' ebenfalls constant, wie V, und $\int Vmds = \int V'm'ds$, also $V\int mds = V'\int m'ds$; zugleich aber wäre die Gesammtmasse in beiden Fällen gleich, nämlich $\int mds = \int m'ds$; folglich $V = V'$. Da nun $V - V'$ das Potential der Masse $\int \mu ds = 0$ ausdrückt, so wäre dieses Potential auf der Fläche und im ganzen Raume Null; folglich wäre auch die Wirkung der auf der Fläche vertheilten Masse $\int \mu ds$, welche Masse $= 0$ ist, überall Null. Dies ist nicht möglich, wenn nicht die Dichtigkeit μ in jedem Puncte der Fläche Null ist. Dieser letzte Schluss ist, da hier von einer ungleichartigen Vertheilung der Gesammtmasse Null die Rede ist, allerdings nicht so unmittelbar einleuchtend, wie vorhin bei gleichartiger Vertheilung; die strenge Begründung desselben ist aus §. 18. der Abhandlung zu entnehmen.

11. Diese Sätze liefern die Mittel um zu beweisen, dass es immer, wenn nicht eine gleichartige, doch eine ungleichartige Vertheilung einer gegebenen Masse M auf der Fläche giebt, für welche die Differenz $W = V - U$ einen constanten Werth erhält, wenn V das Potential von M in irgend einem Puncte der Fläche bedeutet, und U eine für jeden Punct der Fläche beliebig gegebene, jedoch stetig veränderliche Grösse ist, wie in 7.

Denkt man sich zunächst $U = 0$, so giebt es nach 10. eine gleichartige Vertheilung, für welche V überall in der Fläche einen constanten Werth A erhält, der nur dann Null sein könnte, wenn $M = 0$ wäre, was nicht angenommen wird. Es sei die dieser Vertheilung entsprechende Dichtigkeit $m = m^0$, so dass $m^0 ds$ die auf das Flächenelement ds gelegte Masse anzeigt und $\int m^0 ds = M$ ist. Das Potential auf der Fläche für diese Vertheilung sei V^0; sein Werth ist constant; ferner ist kein Theil der Fläche unbelegt.

Man denke sich eine zweite gleichartige Vertheilung der Masse M, in welcher $m = m'$, $V = V'$ sei, und welche dem Minimum des Ausdruckes $\int (V - 2\varepsilon U)\, mds$ entspreche, wo ε einen beliebigen constanten Coefficienten bezeichnet.

Ferner denke man sich eine dritte Vertheilung, für welche $m = \mu$, $V = v$ sei; die Dichtigkeit μ in dem Elemente ds sei bestimmt durch die Gleichung: $\mu = \frac{m' - m^0}{\varepsilon}$; daher $v = \frac{V' - V^0}{\varepsilon}$. Da $\int m'ds = \int m^0 ds = M$, so ist $\int \mu ds = 0$; diese Vertheilung ist also eine ungleichartige der Gesammtmasse Null.

Nach 7. ist $V' - \varepsilon U$ in dem bei der zweiten Vertheilung belegten Flächenstück constant; also ist in diesem Flächenstück auch der Werth $V' - \varepsilon U - V^0$ constant, da V^0 überall auf der Fläche gleichen Werth hat; also ist auch $\frac{V' - V^0}{\varepsilon} - U = v - U$ in dem bei der zweiten Vertheilung belegten Flächenstück constant.

Denkt man sich nun den constanten, d. h. für alle Puncte der Fläche gleichen Coefficienten ε' unendlich klein, so kann bei der zweiten Vertheilung kein endliches Stück der Fläche unbelegt bleiben. Denn wäre dieses, so müsste $\int V'm'ds$ sich von $\int V^0 m^0 ds$ um einen endlichen Werth e unterscheiden, da $\int V^0 m^0 ds$ das Minimum von $\int V m ds$ ist, welches Minimum kein unbelegtes Flächenstück zulässt (nach 10.); demnach wäre der Unterschied der Integrale

$$\int (V' - 2\varepsilon U)\, m' ds - \int (V^0 - 2\varepsilon U)\, m^0 ds = e - 2\varepsilon \int U (m - m') ds$$

für ein unendlich kleines ε positiv, weil $e = \int V' m' ds - \int V^0 m^0 ds$ positiv und endlich ist; allein dieser Unterschied muss negativ sein, da $\int (V' - 2\varepsilon U)\, m' ds$ den kleinsten Werth von $\int (V - 2\varepsilon U)\, m ds$ darstellt.

Nimmt man daher in der dritten Vertheilung für μ den Grenzwerth von $\frac{m' - m}{\varepsilon}$, bei unendlicher Abnahme von ε, so erhält $v - U$ in der ganzen Fläche einen constanten Werth.

Die Vertheilung der Masse M, welche geschehen muss, wenn $V - U$ auf der Fläche constant bleiben soll, wird daher durch $m = m^0 + \mu$ angegeben, wo μ den obigen Grenzwerth vorstellt. Denn da $\int \mu ds = 0$, so ist $\int m ds = \int m^0 ds = M$, also die gesammte Masse $= M$; ihr Potential ist $V = V^0 + v$. Da V^0 und $v - U$ constant sind, so wird demnach $V - U = V^0 + v - U$ constant, wie verlangt wurde. — Dass auch diese Vertheilung nur auf eine Art möglich ist, folgt wie das Entsprechende in 10.

12. Es stelle jetzt $-U$ das Potential einer im Innern des von der Fläche umschlossenen Raumes enthaltenen Masse $-M$ vor; V wie bisher das Potential der an der Oberfläche so vertheilten Masse M, dass $V - U$ constant ist. Da die Gesammtmasse $M - M = 0$ ist, so folgt, dass der constante Werth $V - U$ ebenfalls $= 0$ sein muss. Denn es sei R der Halbmesser einer den ganzen Raum (T) von M und $-M$ umhüllenden Kugel und ds ein Element desselben, so ist, wenn $V - U$ seinen Werth in ds vorstellt,

$\int(V-U)\,ds = 0$, nach 3., weil die eingeschlossene Masse $= M - M = 0$, und ausserhalb der Kugel keine Masse vorhanden, also auch $V^0 = 0$ ist. Allein das Potential $V - U$, welches an der Oberfläche des Raumes T constant ist, kann nach 9. ausserhalb dieses Raumes sein Zeichen nicht wechseln; folglich kann auch das über die ganze aussen befindliche Kugelfläche ausgedehnte Integral $\int(V-U)\,ds$ nicht Null sein, wenn nicht $V - U = 0$. Folglich ist im ganzen äusseren Raume $V - U = 0$ (vgl. 8.), mithin auch, da sich das Potential nach der Stetigkeit ändert, an der Oberfläche $V - U = 0$.

Da hiernach das vereinigte Potential $V - U$ der im Innern vertheilten Masse $-M$ und der auf der Fläche vertheilten Masse M auf der Fläche und im äusseren Raume überall denselben Werth hat, nämlich Null; so ist auch, wenn dt ein beliebiges Linear-Element auf der Fläche oder im äusseren Raume bezeichnet, $\frac{d\,(V-U)}{dt} = 0$; d. h. die Anziehung der Gesammtmasse $M - M$ ist nach jeder Richtung auf der Fläche und im äusseren Raume Null. Folglich hält die Wirkung von M in jedem Puncte auf der Fläche und im äusseren Raume der Wirkung von $-M$ Gleichgewicht; oder die Wirkung einer inneren Masse $-M$ lässt sich durch eine passende Vertheilung derselben Masse $-M$ an der Oberfläche, für diese Fläche und den ganzen äusseren Raum vollständig ersetzen; w. z. b. w.

12. Denkt man sich eine beliebige Massenvertheiluug blos auf den äusseren von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Raum beschränkt, so kann man ihre Wirkung auf den inneren Raum ebenfalls durch eine blos auf der Oberfläche vertheilte Masse ersetzen. Bezeichnet nämlich U das Potential der äusseren Massen M für einen beliebigen Punct der Fläche S, so lässt sich nach 11. eine willkührlich gegebene Masse M' auf der Fläche, wenn nicht gleichartig, so doch ungleichartig, so vertheilen, dass, wenn V das Potential von M' für die Fläche S bedeutet, die Differenz $V - U$ auf der ganzen Fläche S constant wird. Da der unter 5. aufgestellte Lehrsatz noch richtig bleibt, wenn ein Theil der Massen sich auf der Oberfläche des geschlossenen Raumes T befindet; so ist das Potential der Masse $M' - M$ auch in dem ganzen Raume innerhalb der Fläche S constant, und mithin die Wirkung der Masse M' in jedem Puncte dieses inneren Raumes einerlei mit der Wirkung von M in demselben Puncte.

Die Ausdehnung des Lehrsatzes in 5. rechtfertigt sich durch ähnliche Betrachtungen wie in 9. angewandt sind. Wäre nämlich das Potential der Masse M′ — M in einem Puncte O des inneren Raumes verschieden von seinem constanten Werthe A an der Oberfläche S dieses Raumes, so sei B sein Werth in O. Bezeichnet nun C eine Grösse zwischen B und A, so müsste das Potential, da es sich nur stetig ändert, in jeder Richtung von O aus, bevor es den Werth A erlangt, = C werden; also liesse sich um O eine ganz im inneren Raume liegende geschlossene Fläche beschreiben, auf welcher das Potential überall = C wäre. Nach 5. wäre dasselbe mithin auch innerhalb dieser Fläche und mithin in O selbst = C, was der Voraussetzung widerspricht. —

Die Verwandlung des Ausdruckes $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$ (= W) durch Polarcoordinaten kommt häufig vor und liegt namentlich auch der Untersuchung von Gauss über die allgemeine Theorie des Erdmagnetismus zu Grunde. Man bewirkt sie am leichtesten dadurch, dass man zuerst Polarcoordinaten in der Ebene xy einführt, nämlich $x = \varrho \cos\psi$, $y = \varrho \sin\psi$, und nachher $\varrho = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ setzt. Man erhält:

$$dx = \cos\psi d\varrho - \varrho \sin\psi d\psi,\quad dy = \sin\psi d\varrho + \varrho\cos\psi d\psi$$

$$d\varrho = \cos\psi dx + \sin\psi dy,\quad \varrho d\psi = \cos\psi dy - \sin\psi dx$$

und weil $\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = \frac{dV}{d\varrho}d\varrho + \frac{dV}{d\psi}d\psi$ ist,

$$\frac{dV}{d\varrho} = \frac{dV}{dx}\cos\psi + \frac{dV}{dy}\sin\psi,\quad \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\psi} = \frac{dV}{dy}\cos\psi - \frac{dV}{dx}\sin\psi$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\varrho}\cos\psi - \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\psi}\sin\psi,\quad \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{d\varrho}\sin\psi + \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\psi}\cos\psi.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke ergiebt sich:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{dxd\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dx} + \frac{d^2V}{dxd\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} + \frac{d^2V}{dyd\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dy} + \frac{d^2V}{dyd\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy}$$

$$= \frac{d^2V}{dxd\varrho}\cos\psi + \frac{d^2V}{dyd\varrho}\sin\psi + \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{d^2V}{dyd\psi}\cos\psi - \frac{d^2V}{dxd\psi}\sin\psi\right\}$$

$$= \frac{d\left(\frac{dV}{dx}\cos\psi + \frac{dV}{dy}\sin\psi\right)}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\left(\frac{dV}{dy}\cos\psi - \frac{dV}{dx}\sin\psi\right)}{d\psi}$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\left(\frac{dV}{dx}\cos\psi + \frac{dV}{dy}\sin\psi\right),\ \text{also}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\varrho}.$$

Um ferner von ϱ und z auf r und φ überzugehen, braucht man in vorstehender Formel nur x, y, ϱ, ψ mit ϱ, z, r, φ zu vertauschen; man erhält:

$$\frac{d^2V}{d\varrho^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2}.$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt $W = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2V}{d\psi^2}$, und wenn für ϱ sein Werth $r\cos\varphi$ gesetzt wird, wodurch $\frac{dV}{d\varrho}$ sich, nach Analogie des obigen Werthes von $\frac{dV}{dx}$, in $\frac{dV}{dr}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\sin\varphi$ verwandelt, so kommt

$$W = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dV}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{r^2\cos\varphi^2}\frac{d^2V}{d\psi^2}$$

$$\text{oder}\quad r^2W = r\frac{d^2(rV)}{dr^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} - \frac{dV}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi$$

welches die verlangte Umformung ist. — Ist nun eine Kugel vom Halbmesser R als Träger nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehender (oder abstossender) Massen gegeben, so ist für jeden Punct ausser der Kugel $W = 0$. Zugleich ist alsdann $V = \int\frac{dm}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\Theta + \varrho^2}}$, wenn dm ein Massenelement der Kugel, ϱ dessen Entfernung vom Mittelpuncte C, und r die Entfernung des äusseren Punctes O von C, endlich Θ den Winkel zwischen r und ϱ bezeichnet, also $\cos\Theta$ den Werth $\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\psi-\psi') + \sin\varphi\sin\varphi'$, in welchem φ und ψ sich auf O, φ' und ψ' auf dm beziehen. Da r grösser ist als R und mithin grösser als alle ϱ, so kann man $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\Theta + \varrho^2}}$ und mithin auch V nach fallenden Potenzen von r entwickeln; setzt man hiernach, um der Gleichung $W = 0$ Genüge zu leisten, $\frac{V}{R} = \frac{P_0R}{r} + \frac{P_1R^2}{r^2} + \frac{P_2R^3}{r^3} + \ldots$, so sind die Coefficienten P_0, P_1, P_2, ... rationale ganze Functionen der auf den Punct O bezüglichen Werthe von $\cos\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\varphi$, von bestimmter Form, deren numerische Coefficienten sich aus den Werthen von V an der Oberfläche herleiten lassen. Nämlich die Reihe für $\frac{V}{R}$, in welcher $r > R$, bleibt noch convergent, wenn $r = R$ angenommen wird, und stellt alsdann die Werthe von $\frac{V}{R}$ auf der Oberfläche dar, wenn die numerischen

Coefficienten in P_0, P_1, P_2 .. gehörig bestimmt sind. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function von φ uud ψ durch eine Reihe von der Form $P_0 + P_1 + P_2 + \ldots$ kann man eine Abhandlung von Lejeune-Dirichlet im 17. Bande des Journals für Mathematik von Crelle (S. 35.) nachsehen. Das Nähere über die von Gauss auf den Magnetismus gemachte Anwendung gehört nicht hierher.

---

3. Anziehung des Ellipsoids.

Die für die mechanische Physik wichtige Frage nach der Anziehung, welche eine in dem Raume eines Ellipsoids gleichmässig vertheilte Masse, nach dem Gravitationsgesetze, auf einen Punct ausübt, hat zwar längst ihre Beantwortung gefunden; indessen dürfte die Weitläufigkeit der frühern Bearbeitungen, welche dadurch entstand, dass man den Fall eines äussern Punctes erst durch eine besondere Betrachtung auf den eines inneren zurückzuführen sich genöthigt sah, hier die Mittheilung einer neuen, kürzer zum Ziele führenden Methode von L. Dirichlet*) rechtfertigen. Dieselbe gründet sich auf einige bestimmte Integrale, welche wir zunächst angeben und mit einer kurzen Andeutung ihres Beweises begleiten wollen.

Bezeichnet man, nach Legendre, das Integral $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$, in welchem a eine reelle positive Zahl ist, durch Γa, und sind k und h ebenfalls reelle Grössen, k zugleich positiv, endlich $i = \sqrt{-1}$, so hat man

$$\int_0^\infty e^{-(k+hi)x} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma a}{(k+hi)^a} \qquad \text{I.}$$

wo für die vieldeutige Potenz $(k+hi)^a$ der Werth zu setzen ist, welcher für $h = 0$ in den positiven Werth von k^a übergeht, nämlich

$$(k+hi)^a = (k^2+h^2)^{\frac{a}{2}} \cdot e^{ia \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{k}}$$

in welcher Gleichung $(k^2+h^2)^{\frac{a}{2}}$ nur seinen positiven Werth vorstellt, und $\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{k}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist.

---

*) Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Denkschriften der Berliner Academie vom Jahre 1836.

Zum Beweise setze man $k + hi = p$ und $y = \int_0^\infty e^{-px} x^{a-1} dx$, so findet man $\frac{dy}{dp} = -\int_0^\infty e^{-px} x^a dx$, und weil $d\left(e^{-px} x^a\right) = a . e^{-px} x^{a-1} dx - p e^{-px} x^a dx$, mithin $a \int_0^\infty e^{-px} x^{a-1} dx = p \int_0^\infty e^{-px} x^a dx$ ist, indem der Ausdruck $e^{-px} x^a$ für $x = 0$ verschwindet, weil a positiv ist, und für $x = \infty$ ebenfalls verschwindet, weil der reelle Theil von p positiv ist; so erhält man: $\frac{dy}{dp} = -\frac{ay}{p}$, also $y . p^a = C$. Die Constante ergiebt sich für $p = 1$, $= \Gamma a$, und bleibt immer dieselbe, da y eine stetige Function von p ist, so lange nur der reelle Theil von p positiv ist; also ist $y = \frac{\Gamma a}{p^a}$, w. z. b. w.

Setzt man in I. $a = 1$ und $h = 1$, und trennt das Reelle vom Imaginären, so kommt, weil $\Gamma 1 = 1$,

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos x . dx = \frac{k}{1 + k^2}, \quad \int_0^\infty e^{-kx} \sin x . dx = \frac{1}{1 + k^2}.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit dk und integrirt von $k = 0$ bis $k = \infty$, so kommt, weil $\int_0^\infty e^{-kx} dk = \frac{1}{x}$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{II.}$$

Folglich ist auch, wenn l eine positive Grösse bezeichnet, und in vorstehender Formel lx für x gesetzt wird, wobei die Grenzen unverändert bleiben, $\int_0^\infty \frac{\sin lx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Für einen negativen Werth von l ist mithin $\int_0^\infty \frac{\sin lx}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$.

Da $2 \sin x \cos gx = \sin(1 + g)x + \sin(1 - g)x$, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cos gx . dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(1+g)x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(1-g)x}{x} dx.$$

Nach dem Vorstehenden wird der Ausdruck auf der rechten Seite $= \frac{\pi}{2}$, wenn der positive Werth von g zwischen 0 und 1 liegt, hingegen = 0, wenn dieser Werth grösser als 1 ist. Daher ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cos gx . dx = 1 \text{ oder } = 0, \qquad \text{III.}$$

je nachdem der positive Werth von g kleiner oder grösser als 1 ist.

Die Formel I. bleibt noch gültig, wenn $k = 0$, zugleich aber a nicht allein positiv, sondern auch kleiner als 1 ist, indem nur unter dieser Voraussetzung das Integral für $k = 0$ noch einen bestimmten Werth behält; es ergiebt sich:

$$\int_0^\infty e^{hxi} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma a}{(\mp h)^a} . e^{\pm \frac{a\pi}{2} i} \qquad \text{IV.}$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem h positiv oder negativ ist. Setzt man in dieser Formel $a = \frac{1}{2}$ und schreibt x^2 für x, so kommt, wenn man blos den Fall eines positiven h berücksichtigt, da bekanntlich $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$\int_0^\infty e^{hx^2 i} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} . e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$\text{mithin} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{hx^2 i} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} . e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

In dieser Gleichung schreibe man $x + \frac{m}{h}$ für x, wo m eine beliebige reelle Grösse bezeichnet, so bleiben die Grenzen unverändert und man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(hx^2 + 2mx) i} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} . e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m^2}{h}\right) i.} \qquad \text{V.}$$

Die Integrale III. IV. und V. sind es, welche im Folgenden unmittelbar zur Anwendung kommen.

Es seien α, β, γ die halben Axen des Ellipsoids, a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punctes, x, y, z die eines Punctes der anziehenden Masse des gleichartigen Ellipsoids, aus dem Mittelpuncte als Anfange; es sei ferner $\varrho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ und $\frac{1}{\varrho^p}$ das Anziehungsgesetz, wobei p hier als zwischen 2 und 3 liegend angenommen wird, indem das Verfahren

ausserhalb dieser Grenzen einige leichte Modificationen erfordern würde; so ist, nach dem Vorigen, $V = \int \frac{dx\, dy\, dz}{\varrho^{p-1}}$ das Potential der anziehenden Masse für den Punct (a, b, c), die Dichtigkeit jener als Einheit angenommen. Die verlangte Integration ist eine dreifache, und muss sich über alle Werthe von x, y, z erstrecken, für welche $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$. Durch Anwendung des oben unter III. angeführten bestimmten Integrals kann man aber die Einführung der aus dieser Bedingung hervorgehenden Grenzen von x, y, z ganz vermeiden, und die Integration nach jeder dieser Coordinaten auf eine von $-\infty$ bis $+\infty$ auszudehnende bringen. Da nämlich $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$ für alle Puncte im Ellipsoid, ausserhalb desselben aber > 1 ist, so hat man nach jener Formel III.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \cos\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right\}\varphi = 1 \text{ oder } 0$$

je nachdem der Punct (x, y, z) im Ellipsoid liegt oder ausser ihm; multiplicirt man daher diesen Ausdruck mit $\frac{dx\, dy\, dz}{(p-1)\varrho^{p-1}}$, und integrirt nach x, y, z, so erhält man dasselbe Resultat, man mag die Integration nach x, y, z blos über den Raum des Ellipsoids, oder über den unendlichen Raum ausdehnen, nämlich

$$V = \frac{2}{\pi(p-1)} \iiint \frac{dx\, dy\, dz}{\varrho^{p-1}} \int_0^\infty d\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \cos\left\{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right\}\varphi$$

wo die Integrationen nach x, y, z nunmehr alle von $-\infty$ bis $+\infty$ auszuführen sind. Die Methode kommt, wie man sieht, darauf zurück, anstatt des vom Körper erfüllten Raumes den ganzen Raum so in Rechnung zu bringen, dass die Dichtigkeit im Körper so wie sie gegeben ist, ausser ihm aber $= 0$ gesetzt wird. — Statt des vorstehenden ist es bequemer folgendes Integral zu betrachten:

$$T = \frac{2}{\pi(p-1)} \iiint \frac{dx\, dy\, dz}{\varrho^{p-1}} \int_0^\infty d\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot e^{\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi i}$$

wovon V der reelle Theil ist. Mittels der Formel IV. lässt sich $\frac{1}{\varrho^{p-1}}$ durch ein bestimmtes Integral darstellen, dessen Be-

nutzung die Integrationen nach x, y, z ausführbar macht. Man hat nämlich nach IV.

$$\int_0^\infty e^{\varrho^2\psi i}\,\psi^{\frac{p-1}{2}-1}\,d\psi = \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{(\varrho^2)^{\frac{p-1}{2}}}\cdot e^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i}$$

folglich $$\frac{1}{\varrho^{p-1}} = \frac{1}{(\varrho^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{(p-1)\pi i}{4}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{\varrho^2\psi i}\cdot\psi^{\frac{p-3}{2}}\,d\psi.$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{1}{\varrho^{p-1}}$ in den Ausdruck von T, so kommt man auf ein fünffaches Integral, in welchem man aber die Integrationen nach x, y, z, von $-\infty$ bis $+\infty$, zuerst vollziehen kann, wodurch dasselbe auf ein zweifaches zurückgeführt wird. Man erhält nämlich, da $\frac{p-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$ ist,

$$T = \frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\,e^{-(p-1)\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\,d\psi\,.\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,.\,\psi^{\frac{p-3}{2}}\,.\,e^{(a^2+b^2+c^2)\psi i}\,.\,U$$

wo U ein Product aus drei einfachen Integralen ist, von denen das erste folgende ist: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2-2ax\psi\right\}i}\,dx$, das zweite und dritte aber sich aus dem ersten durch Vertauschung von α, a mit β, b und mit γ, c sofort ergeben. Der Werth dieses Integrals ist, zufolge V., $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\,.\,e^{-\frac{a^2\psi^2 i}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}$; die Werthe der beiden andern ergeben sich hieraus durch die genannten Vertauschungen, mithin folgt durch Vereinigung dieser Factoren:

$$T = \frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\cdot e^{-\frac{p\pi i}{4}}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\,d\psi\,.\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\times$$

$$\frac{\psi^{\frac{p-3}{2}}}{\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}\cdot e^{\varphi\psi\left(\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}+\frac{b^2}{\varphi+\beta^2\psi}+\frac{c^2}{\varphi+\gamma^2\psi}\right)i}$$

Führt man eine neue Veränderliche s ein, welche das Verhältniss $\frac{\varphi}{\psi}$ ausdrückt, und eliminirt mit Hülfe derselben ψ aus vorstehendem Integral, so ist $\psi = \frac{\varphi}{s}$, $d\psi = -\frac{\varphi ds}{s^2}$ zu setzen, und die Grenzen nach s sind ∞ und 0, wofür 0 und ∞ zu nehmen sind, wenn man zugleich das Zeichen des Integrals umkehrt. Man findet:

$$T = \frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} e^{-\frac{p\pi i}{4}} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty d\varphi\, ds \frac{\sin\varphi . \varphi^{\frac{p}{2}-3} . s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} e^{\varphi S i}$$

wo $S = \frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s}$ ist. Differentiirt man nach a, welches blos in S vorkommt, so folgt

$$\frac{dT}{da} = \frac{-2ai\sqrt{\pi}}{\alpha^2\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} . e^{-\frac{p\pi i}{4}} \int_0^\infty ds . \frac{s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \times$$

$$\int_0^\infty d\varphi \sin\varphi . \varphi^{\frac{p}{2}-2} . e^{\varphi S i}$$

wovon der reelle Theil die nach x gerichtete Componente der Anziehung vorstellt, welche mit A bezeichnet werden mag. Es kommt also darauf an, den reellen Theil von folgendem Ausdruck zu finden:

$$R = i . e^{-\frac{p\pi}{4} i} . \int_0^\infty d\varphi . \varphi^{\frac{p}{2}-2} . \sin\varphi . e^{\varphi S i} .$$

Nun ist $2i \sin\varphi = e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}$, folglich

$$2R = e^{-\frac{p\pi}{4} i} \left\{ \int_0^\infty d\varphi . \varphi^{\frac{p}{2}-2} . e^{\varphi(S+1)i} - \int_0^\infty d\varphi . \varphi^{\frac{p}{2}-2} . e^{\varphi(S-1)i} \right\} .$$

Da $\frac{p}{2} - 1$ ein positiver ächter Bruch ist, so kann hier die Formel IV. angewandt werden. Nach ihr erhält man

1. wenn $S > 1$ ist,

$$2R = -i\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\left\{\frac{1}{(S+1)^{\frac{p}{2}-1}} - \frac{1}{(S-1)^{\frac{p}{2}-1}}\right\};$$

folglich ist der reelle Theil von R gleich Null, wenn $S > 1$.

2. Wenn $S < 1$, so kommt

$$R = \frac{1}{2} e^{-\frac{p\pi i}{4}} \Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\left\{\frac{e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}i}}{(S+1)^{\frac{p}{2}-1}} - \frac{e^{\left(1-\frac{p}{2}\right)\frac{\pi}{2}i}}{(1-S)^{\frac{p}{2}-1}}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{(S+1)^{\frac{p}{2}-1}} - \frac{e^{\frac{(1-p)\pi i}{2}}}{(1-S)^{\frac{p}{2}-1}}\right\}$$

wovon der reelle Theil ist:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right).\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{(1-S)^{\frac{p}{2}-1}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\sin\frac{p\pi}{2}}{(1-S)^{\frac{p}{2}-1}},\text{ oder}$$

weil $\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right).\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi} = \frac{-\pi}{\sin\frac{p\pi}{2}}$, so ergiebt sich der reelle Theil von $R = \frac{\pi}{2}.\frac{(1-S)^{1-\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}$, wenn $S < 1$.

Für einen innern Punct ist $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2} > 1$, also um so mehr, da s nur positive Werthe erhält, $S = \frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s} < 1$; daher gilt für den innern Punct der zweite Werth des reellen Theils von R und mithin ist:

$$A = \frac{-a.\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty ds.\frac{s^{1-\frac{p}{2}}(1-S)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Für einen äusseren Punct ist $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2} > 1$, daher auch, wenn s von 0 an wächst, anfänglich $S > 1$, bis für einen

gewissen Werth s_1 von s, $S = 1$ wird, von wo aus S mit wachsendem s beständig abnimmt. Folglich ist, so lange $s < s_1$, also $S > 1$, der reelle Theil von R Null, für $s > s_1$ aber erhält der reelle Theil von R den anderen Werth; das Integral, welches die Componente A der Anziehung ausdrückt, ist mithin dasselbe wie vorhin, nur nicht von $s = 0$ sondern von $s = s_1$ anfangend. Daher erhält man für einen äusseren Punct:

$$A = \frac{-a.\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2 \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)} \int_{s_1}^{\infty} \frac{ds.s^{1-\frac{p}{2}}(1-S)^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

wo s_1 die positive Wurzel folgender Gleichung ist:

$$\frac{a^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2}{\beta^2+s} + \frac{c^2}{\gamma^2+s} = 1.$$

Für $p = 2$ ergeben sich hieraus die bekannten Resultate.

---

4. Lamé et Clapeyron, Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. (Crelles Journal für Math. Band 7.)

Diese Abhandlung geht, in Betreff der Natur eines homogenen festen Körpers, von folgender Voraussetzung aus: Ein homogener fester Körper, der sich in Ruhe befindet und auf welchem keine äusseren Kräfte wirken, ist der Ort einer sehr grossen Menge materieller Puncte (von gleichen Massen), die gleich weit und sehr wenig von einander abstehen, sich aber nicht berühren, und folgendermaassen auf einander wirken: Wenn durch einen äusseren Druck oder eine plötzlich auftretende Kraft zwei beliebige Puncte einander näher oder ferner gerückt werden, so entsteht zwischen ihnen eine Abstossung im ersten, eine Anziehung im zweiten Falle, welche eine Function des ursprünglichen Abstandes und seiner Aenderung ist. Diese Function ist für jeden beliebigen Abstand Null, wenn die Aenderung des Abstandes Null ist; sie nimmt sehr schnell ab, wenn der Abstand wächst, so dass sie einen unmerklichen Werth erhält, wenn der Abstand einen merklichen Werth hat. Je nachdem diese Function sich mehr oder weniger schnell ändert, wenn der Abstand immer mehr geändert wird, bewirkt derselbe Druck im ersten Falle eine geringere, im

zweiten eine grössere Formveränderung; in jenem befinden sich die starren Körper (corps rigides) wie Steine, Metalle; in diesem die elastischen wie Cautschuk.

Die folgende Theorie bezieht sich nur auf den Fall sehr kleiner Formänderungen, indem sie entweder nur die Einwirkung schwacher Kräfte oder eine grosse Starrheit des Körpers voraussetzt. Alsdann wird die Function des ursprünglichen Abstandes (ζ) und seiner Aenderung ($\Delta\zeta$) sich auf das Product aus der ersten Potenz von $\Delta\zeta$ in eine Function $F(\zeta)$ beschränken, welche für jeden merklichen Werth von ζ Null ist.

Es seien x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Theilchens M im Innern des Körpers, u, v, w die durch die angebrachten Kräfte bewirkten Aenderungen derselben, so ist es die Aufgabe, die Verrückungen u, v, w durch x, y, z auszudrücken, unter der Voraussetzung, dass sie sehr klein sind, und zugleich die damit verbundenen Spannungen im Innern des Körpers zu bestimmen. Bezeichnen x', y', z' die anfänglichen Coordinaten eines zweiten Theilchens M', in der Nähe von M, und u', v', w' die Verschiebungen von M', so hat man für die Entfernung $MM' = \zeta$ die Gleichung $\zeta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$, und für die durch Verschiebung der Theilchen entstandenen Aenderung $\Delta\zeta$:

$$(\zeta+\Delta\zeta)^2 = (x'-x+u'-u)^2 + (y'-y+v'-v)^2 + (z'-z+w'-w)^2$$

oder, mit Weglassung der zweiten Potenzen von $\Delta\zeta$, u, u', ... und indem man

$$x'-x = h,\ y'-y = k,\ z'-z = l$$

setzt,
$$\zeta\Delta\zeta = h(u'-u) + k(v'-v) + l(w'-w).$$

Die Kraft mit welcher M' auf M anziehend wirkt, ist nach der Voraussetzung $= F(\zeta).\Delta\zeta$, multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\frac{h}{\zeta}$, $\frac{k}{\zeta}$, $\frac{l}{\zeta}$, so ergeben sich ihre Componenten nach x, y, z; diese sind mithin

$$\left\{(u'-u)\frac{h}{\zeta} + (v'-v)\frac{k}{\zeta} + (w'-w)\frac{l}{\zeta}\right\} F(\zeta).\frac{h}{\zeta} \text{ nach } x, \text{ u. s. f.} \quad 1.$$

Eine solche Componente ist positiv oder negativ, je nachdem sie ihren Angriffspunct nach der positiven oder negativen Richtung der ihr entsprechenden Axe (was man durch vorwärts oder rückwärts bezeichnen kann) fortzuziehen strebt.

Die Verschiebung u ist eine Function von x, y, z; bezeichnet man daher u mit $f(x, y, z)$, so ist die auf M' bezügliche Verschie-

bung $u' = f(x', y', z')$, und weil $x' = x + h$, $y' = y + k$, $z' = z + l$, so ist, wenn man nach Potenzen von h, k, l entwickelt und die höheren Glieder weglässt:

$$u' - u = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l.$$

Dieser Werth von $u' - u$, und eben so die entsprechenden für $v' - v$, $w' - w$ sind in die unter 1. angegebenen Anziehungs-Componenten einzusetzen.

Dieses vorausgesetzt, denke man sich in dem Körper eine Ebene E, parallel mit xy, in der Entfernung $= z$ vom Anfange der Coordinaten, und einen auf ihr senkrechten Cylinder, von sehr kleiner in E befindlicher Grundfläche ε, von E aus rückwärts errichtet; so lassen sich die aus einer kleinen Verschiebung entstehenden Wirkungen der vor der Ebene E (also auf ihrer vom Cylinder abgekehrten Seite) befindlichen Theilchen auf den Cylinder folgendermassen finden: Es sei M das an der Grundfläche ε liegende Theilchen des Cylinders, dessen (anfängliche) Coordinaten x, y, z sind; M' sei ein vor der Ebene E liegendes Theilchen, dessen anfängliche Coordinaten x', y', z'; so findet man für die Componenten der durch Verschiebung entstehenden Anziehung von M' auf M die unter 1. gegebenen Ausdrücke. Ferner sei M_1 ein Theilchen des Cylinders, dessen anfängliche Coordinaten $x, y, z - p$ sind, wo p eine positive Grösse bezeichnet, der man nur sehr kleine Werthe beizulegen braucht, weil nur die nahe an der Grundfläche liegenden Theile des Cylinders in Betracht kommen, und es sei noch M_1' das vor der Ebene E befindliche Theilchen, dessen Coordinaten $x', y', z' - p$ sind, so dass die gerade Linie $M'_1 M_1$ der Geraden $M'M = \zeta$ gleich und parallel ist. Bezeichnet man durch u_1, v_1, w_1 die Verschiebungen von M_1, und durch u_1', v_1', w_1' die von M_1', so findet sich $u_1 = f(x, y, z - p)$, also $u_1 = u - \frac{du}{dz}p$,

$u_1' = f(x', y', z' - p)$, also $u_1' = u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}(l - p)$;

folglich $u_1' - u_1 = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l = u' - u$, ebenso $v_1' - v_1 = v' - v$, $w_1' - w_1 = w' - w$; woraus hervorgeht, dass die Anziehung von M'_1 auf M_1 der von M' auf M parallel und gleich ist, indem sich für die Componenten jener ebenfalls die Ausdrücke 1. ergeben. Diese Ausdrücke gelten zunächst für die Einheiten der Masse; drückt man aber das Element des Volumens oder der Masse

des Cylinders von der Grundfläche ε, durch εdp aus, und setzt man $h = \zeta \cos\varphi \cos\psi$, $k = \zeta \cos\varphi \sin\psi$, $l = \zeta \sin\varphi$, wodurch für das anziehende Element M' oder M'_1 der Ausdruck $\zeta^2 \cos\varphi d\varphi d\psi d\zeta = d\lambda$ erhalten wird, so hat man die unter 1. gegebenen Werthe noch mit $d\lambda . \varepsilon dp$ zu multipliciren. Man findet daher, wenn zur Abkürzung

$$\left(\frac{du}{dx}\cos\varphi\cos\psi + \frac{du}{dy}\cos\varphi\sin\psi + \frac{du}{dz}\sin\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi + \left(\frac{dv}{dx}\cos\varphi\cos\psi + \frac{dv}{dy}\cos\varphi\sin\psi + \frac{dv}{dz}\sin\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi + \left(\frac{dw}{dx}\cos\varphi\cos\psi + \frac{dw}{dy}\cos\varphi\sin\psi + \frac{dw}{dz}\sin\varphi\right)\sin\varphi = Q$$

gesetzt wird, als Componenten nach x, y, z folgende Werthe:

$$Q\zeta F(\zeta) . \cos\varphi \cos\psi . d\lambda . \varepsilon dp, \quad Q\zeta F(\zeta) \cos\varphi \sin\psi d\lambda . \varepsilon dp,$$
$$Q\zeta F(\zeta) \sin\varphi d\lambda . \varepsilon dp, \text{ wo } d\lambda = \zeta^2 \cos\varphi d\varphi d\psi d\zeta.$$

Integrirt man diese Ausdrücke zuerst von $p = 0$ bis $p = \zeta \sin\varphi$, so ergiebt sich die Summe aller Wirkungen, welche in der Richtung (φ, ψ) und aus dem Abstande ζ, von den vor der Ebene ε befindlichen Theilchen, auf den Cylinder ausgeübt werden, und integrirt man sodann von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und von $\zeta = 0$ bis zu $\zeta = \infty$ (indem $F(\zeta) = 0$ wird, wenn ζ einen merklichen Werth hat), so erhält man folgende Componenten der auf den Cylinder wirkenden Anziehung:

$$X'' = A\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \quad Y'' = A\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad Z'' = A\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\right), \qquad 2.a.$$

wo $A = \frac{\pi}{15}\int_0^\infty \zeta^4 F\zeta d\zeta$ und der Factor ε weggelassen ist, also die Kräfte auf die Flächeneinheit gebracht sind.

Auf dieselbe Weise findet man für einen auf yz senkrechten Cylinder:

$$X = A\left(3\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right), \quad Y = A\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right), \quad Z = A\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right). \qquad 2.b.$$

Und für einen auf xz senkrechten Cylinder:

$$X' = A\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \quad Y' = A\left(\frac{du}{dx} + 3\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right), \quad Z' = A\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right). \qquad 2.c.$$

Ein cylindrisches (oder prismatisches) Element des Körpers, dessen Grundflächen der Ebene yz parallel sind, also die Seite parallel mit x, erleidet daher an seiner vorderen (d. h. zu dem algebraisch grösseren Werthe von x gehörigen) Grundfläche einen schiefen Druck oder Zug $= P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Die Componenten X, Y, Z sind positiv oder negativ, je nachdem sie ihren

Angriffspunct vor- oder rückwärts zu ziehen, also bezüglich die Werthe von X, Y, Z algebraisch zu vergrössern oder zu vermindern streben. Die Kraft P ist ein Zug oder Druck, je nachdem ihre auf der Fläche des zugehörigen Elementes normale Componente, nämlich X, positiv oder negativ ist. Mit dieser die Bedeutung der Vorzeichen betreffenden Bemerkung kann noch die Anmerkung zu dem später unter 1. aufgeführten Satze verglichen werden.

Denkt man sich daher in dem Körper ein prismatisches unendlich kleines Element $= dx\,dy\,dz$, dessen Grenzflächen den Coordinaten-Ebenen parallel sind, und gehört von den beiden mit yz parallelen Grenzflächen die eine (vordere) zur Abscisse x, die zweite zu $x - dx$, so erleidet die erste durch die vor ihr befindlichen Theilchen einen schiefen Zug, dessen Componenten $X\varepsilon$, $Y\varepsilon$, $Z\varepsilon$ sind, wo $\varepsilon = dy\,dz$, und die zweite durch die hinter ihr liegenden Theilchen des Körpers einen schiefen Gegenzug, dessen Componenten $-\left(X - \frac{dX}{dx}dx\right)\varepsilon$, $-\left(Y - \frac{dY}{dx}dx\right)\varepsilon$, $-\left(Z - \frac{dZ}{dx}dx\right)\varepsilon$ sind; daher ergeben sich für die Resultante dieser auf die beiden Grenzflächen $dy\,dz$ wirkenden Zugkräfte folgende Componenten: $\frac{dX}{dx}dx\,dy\,dz$, $\frac{dY}{dx}dx\,dy\,dz$, $\frac{dZ}{dx}dx\,dy\,dz$, welche das Element beziehungsweise nach der Richtung der positiven x, y, z fortzuziehen streben. Für die Resultante der auf $dx\,dz$ wirkenden Kräfte folgen die Componenten:

$$\frac{dX'}{dy}dx\,dy\,dz,\ \frac{dY'}{dy}dx\,dy\,dz,\ \frac{dZ'}{dy}dx\,dy\,dz \text{ bez. nach } x, y, z$$

und für die auf $dx\,dy$ wirkenden Zugkräfte die Componenten:

$$\frac{dX''}{dz}dx\,dy\,dz,\ \frac{dY''}{dz}dx\,dy\,dz,\ \frac{dZ''}{dz}dx\,dy\,dz \text{ bez. nach } x, y, z.$$

Sind nun $X_1\,dx\,dy\,dz$, $Y_1\,dx\,dy\,dz$, $Z_1\,dx\,dy\,dz$ die auf das Element wirkenden äusseren Kräfte, so müssen diese mit den vorstehenden bezüglich nach x, y, z wirkenden Zugkräften im Gleichgewichte sein. Die nach x wirkenden Zugkräfte haben die Resultante

$$\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dX'}{dy} + \frac{dX''}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

mithin erhält man $\frac{dX}{dx} + \frac{dX'}{dy} + \frac{dX''}{dz} + X_1 = 0$ und eben so

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dY'}{dy} + \frac{dY''}{dz} + Y_1 = 0$$

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{dZ'}{dy} + \frac{dZ''}{dz} + Z_1 = 0.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe von X, Y, Z, X′, ... aus 2., so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\frac{d\Theta}{dx}+\frac{X_1}{A}=0\\ \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\frac{d\Theta}{dy}+\frac{Y_1}{A}=0\\ \frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d\Theta}{dz}+\frac{Z_1}{A}=0\end{aligned}\right\}\quad 3.$$

wo noch gesetzt ist: $\Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$. 4.

Der Ausdruck Θ bezeichnet die cubische Ausdehnung in der Nähe des Punctes x, y, z. Betrachtet man nämlich ein sehr kleines Prisma, dessen Kanten $h=x'-x$, $k=y'-y$, $l=z'-z$ sind, so gehen diese durch Verschiebung über in $x'+u'-x-u=h+u'-u$, oder weil $u'=u+\frac{du}{dx}h$, in $h\left(1+\frac{du}{dx}\right)$, u. s. f.; und da die Richtungen der neuen Kanten von den vorigen unendlich wenig abweichen, so verwandelt sich das Volumen hkl in hkl $\left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\right)$, oder weil $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ sehr klein sind, mit Weglassung ihrer Producte in hkl $(1+\Theta)$; daher ist Θ die Ausdehnung oder Verdichtung, je nachdem sein Werth positiv oder negativ ist.

Unter den neun Componenten X, Y, Z, X′, ... (s. Formeln 2.) zeichnen sich X, Y′, Z″ als diejenigen aus, welche auf den zugehörigen Grundflächen des Elementes dx dy dz senkrecht stehen; sie mögen deshalb Normalkräfte heissen und mit N_1, N_2, N_3 bezeichnet werden; die übrigen heissen Tangential-Kräfte; diese sind zu zweien gleich, zufolge der Formeln 2., nämlich $Z'=Y''$, $X''=Z$, $Y=X'$ und sollen in dieser Ordnung mit T_1, T_2, T_3 bezeichnet werden. Aus den Werthen (2.) von $X=N_1$, $Y'=N_2$, $Z''=N_3$ ergiebt sich $N_1+N_2+N_3=5A\Theta$; woraus folgt, dass die Summe der Normalkräfte für jede drei gegen einander senkrechte Ebenen, in demselben Puncte des Körpers, constant sein muss, weil sie der Ausdehnung Θ proportional ist, deren Werth durch Aenderung der Coordinaten nicht geändert werden kann.

In der Abhandlung werden noch mehrere Sätze über die Vertheilung des Zugs oder Druckes im Innern des Körpers gefunden, die mit Unterdrückung der Beweise (welche lediglich bestehen in der Verwandlung der Ausdrücke 2. durch Vertauschung des ersten

Systemes rechtwinklicher Coordinaten mit einem andern derselben Art) hier folgen:

1. Ein ebenes Element ε im Körper erleidet, wenn beliebige äussere Kräfte auf jenen wirken, im Allgemeinen einen schiefen Zug oder Druck P, wie z. B. oben für ein der Ebene yz paralleles Element die Componenten dieser Kraft P sich fanden: $X = N_1$, $Y = T_3$, $Z = T_2$. Werden nun durch einen Punct zwei ebene Elemente ε und ε_1 gelegt, deren Normalen beziehungsweise n und n_1 sind, und sind P und P_1 die darauf schief wirkenden Zug- oder Druck-Kräfte, so ist die Componente von P nach n_1 gleich der Componente von P_1 nach n, oder $P \cos(Pn_1) = P_1 \cos(P_1 n)$.

In der Abhandlung vermisst man eine nähere Erläuterung der Vorzeichen, die bei diesem Gegenstande nöthig zu sein scheint. Nämlich ein ebenes Element ε kommt hier nicht für sich allein, sondern nur als Grenzfläche eines körperlichen Elementes in Betracht, und unter der darauf zu errichtenden Normale n ist der in Beziehung auf das körperliche Element nach aussen gerichtete Theil der Normale zu verstehen. Es ist also hier nicht blos das ebene Element ε, sondern auch eine (beliebige) Seite desselben als die äussere gegeben, und die Kraft P, welche wir der Bequemlichkeit wegen einen Druck nennen wollen, ist im eigentlichen Sinne ein Zug oder ein Druck, je nachdem die Richtung, nach welcher sie ihren Angriffspunct zu ziehen strebt, mit der nach aussen gehenden Normale einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Die Gleichheit der Componente von P nach n_1 mit der von P_1 nach n, welche im vorstehenden Satze behauptet wird, gilt auch in Hinsicht der Zeichen; d. h. beide Componenten fallen immer zugleich entweder auf die äusseren Theile der Normalen n_1 und n oder beide auf die nach innen gerichteten Verlängerungen. Dies ist für das Folgende zu berücksichtigen.

Sind die schiefen Drucke P_1, P_2, P_3 auf drei durch einen Punct gehende auf einander senkrechte ebene Elemente ε_1, ε_2, ε_3 gegeben, deren Normalen n_1, n_2, n_3 sind; und wird der schiefe Druck P auf ein viertes durch diesen Punct gelegtes Element ε verlangt, dessen Normale n ist, so zerlege man zuerst P_1, P_2, P_3 nach n, trage die erhaltenen Componenten beziehungsweise auf die Normalen n_1, n_2, n_3 über und setze diese in eine Resultante zusammen, welche den Druck P darstellen wird.

2. Die Summe der Quadrate der schiefen Drucke auf drei

gegen einander senkrechten Ebenen-Elemente ist für jeden Punct des Körpers constant, d. h. unabhängig von der Wahl des Systems dieser Ebenen.

3. Durch jeden Punct des Körpers lassen sich drei gegen einander senkrechte Ebenen legen, auf deren jeder der zugehörige Druck, in diesem Puncte, senkrecht steht (Hauptschnitte). Die Intensitäten der auf sie wirkenden Drucke, welche mit A, B, C bezeichnet werden sollen, wobei dem Gegensatze zwischen Druck und Zug der Gegensatz der Vorzeichen dieser Grössen entspricht, sind die Wurzeln der ihrer Form nach sehr bekannten cubischen Gleichung:

$$\xi^3 - G\xi^2 + H\xi - K = 0$$

wo $G = N_1 + N_2 + N_3$, $H = N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$,

$$K = N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2.$$

Die Ebene des zu A gehörigen Hauptschnittes ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x'-x}{AT_1 + T_2 T_3 - N_1 T_1} + \frac{y'-y}{AT_2 + T_1 T_3 - N_2 T_2} + \frac{z'-z}{AT_3 + T_1 T_2 - N_3 T_3} = 0,$$

aus welcher sich die zu B und C gehörigen Hauptschnitte durch Vertauschung von A mit B und mit C ergeben. Nimmt man die Richtungen von A, B, C zu Axen x, y, z, und bildet das Ellipsoid dessen Gleichung $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$, so stellt irgend ein Halbmesser desselben den im Mittelpuncte Statt findenden schiefen Druck auf einen Schnitt dar, dessen Ebene E parallel ist der Berührungsebene, welche an eine Fläche zweiten Grades, nämlich $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm 1$, in dem Puncte gelegt wird, in welchem diese von dem nöthigenfalls verlängerten Halbmesser des vorigen Ellipsoids geschnitten wird. Haben A, B, C gleiche Zeichen, so ist die zweite Fläche wieder ein Ellipsoid; bei ungleichen Zeichen von A, B, C drückt die zweite Gleichung zwei Hyperboloide aus, ein einfaches und ein zweitheiliges, welche einen gemeinsamen Berührungskegel haben. Die Halbmesser des ersten Ellipsoids bezeichnen alsdann Druck oder Zug, je nachdem sie das eine oder das andere Hyperboloid treffen; liegen sie im Berührungskegel, so bezeichnen sie Tangential-Kräfte.

4. Die Drucke auf drei gegen einander senkrechte Ebenen werden immer durch drei conjugirte Halbmesser des Ellipsoids $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ darstellt.

Anwendungen. 1. Ein gerades Prisma erleide in der Richtung der Länge einen gleichmässig über den Querschnitt vertheilten Zug (= T für die Flächeneinheit) und ausserdem den seitlichen Druck = P von einer Flüssigkeit, in welche es getaucht ist. Ein Querschnitt wird als befestigt, d. h. seine Theile als unbeweglich nach der Richtung der Länge des Prismas, und ein Punct desselben als ganz unbeweglich angenommen. Nimmt man diesen Punct zum Anfange der x, y, z, den befestigten Querschnitt zur Ebene xy, also z zur Längenaxe, so genügt man den Gleichungen 3., in welchen X_1, Y_1, Z_1 Null sind, weil keine äusseren Kräfte unmittelbar auf die Theilchen wirken, durch die Annahmen: $u = ax$, $v = ay$, $w = bz$, wo a und b zwei noch zu bestimmende Constanten sind. Hieraus erhält man (nach 2.) $X = A\,(4a + b)$, $Y' = A\,(4a + b)$, $Z'' = A\,(2a + 3b)$; die Tangentialkräfte sind alle Null. Da nun an der Oberfläche $X = -P$, $Y' = -P$, $Z'' = T$, so folgt $A\,(2a + 3b) = T$, $A\,(4a + b) = -P$; mithin $a = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}$, $b = \frac{1}{A}\cdot\frac{P+2T}{5}$; also $u = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}x$, $v = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}y$,

$$w = \frac{1}{A}\cdot\frac{P+2T}{5}z,\ \Theta = \frac{T-2P}{5A}.$$

w ist die Verlängerung, welche ein Prisma von der Länge z erleidet. Ist dasselbe blos dem atmosphärischen Drucke P ausgesetzt, so ist $T = -P$, also $w = -\frac{P}{5A}z$. Ist es ausserdem noch der Zugkraft F nach der Länge unterworfen, so ist $T = F - P$, mithin $w' = \frac{2F-P}{5A}z$ die Verlängerung. Die im lufterfüllten Raume beobachtete Länge, nämlich $z + w$, geht also durch die Spannung F in $z + w'$ über; folglich ist $\frac{w'-w}{z+w} = \frac{2F}{5A-P}$ die durch den Zug F bewirkte Verlängerung der anfänglichen in der Luft gemessenen Einheit der Länge. Bezeichnet l den beobachteten Werth derselben, so ist $\frac{2F}{5A-P} = l$, woraus sich ergiebt $A = \frac{2F}{5l} + \frac{P}{5}$. Die Werthe der Constante A für verschiedene Substanzen sind schon im Repertorium angegeben Bd. 1. S. 130.

2. Anwendung auf einen festen Körper, der in eine Flüssigkeit getaucht und an seiner ganzen Oberfläche einen constanten Druck ausgesetzt ist. Nimmt man im Körper einen Punct, der als unbeweglich gedacht wird, zum Anfange der Coordinaten, so wer-

den sich alle Theilchen demselben um eine ihrem Abstande von ihm proportionale Grösse nähern, so dass die Verschiebungen $u = -cx$, $v = -cy$, $w = -cz$ stattfinden, welche den Gleichungen 3. Genüge leisten. Hieraus ergeben sich die Normalkräfte $X = Y' = Z'' = -5Ac$, die Tangentialkräfte sämmtlich gleich Null. Ist P der Druck an der Oberfläche, so ergiebt sich $c = \frac{P}{5A}$. Der Druck ist von allen Seiten gleich, also der Zustand des Körpers nicht abweichend von dem einer Flüssigkeit unter demselben Drucke. Die Verdichtung beträgt $-\Theta = \frac{3P}{5A}$, und kann also berechnet werden, wenn A bekannt ist. Vergl. Rep. I. S. 131.

3. Anwendung auf einen hohlen Cylinder von sehr grosser Länge, kreisförmiger Grundfläche, an den Enden verschlossen, von innen und aussen ungleichen aber beiderseits constanten Pressungen unterworfen. Für einen von beiden Enden sehr entfernten Querschnitt werden die Spannungen, welche aus dem innern und äusseren Druck nach der Längenrichtung des Cylinders hervorgehen, sich über die ganze Dicke gleichmässig vertheilen, und die Verschiebung jedes Theilchens wird daher in einer Meridianebene so erfolgen, dass ihre Componente in der Richtung des Halbmessers nur von diesem abhängen, und ihre Componente nach der Länge des Cylinders dem Abstande von einem als unbeweglich gedachten Querschnitte proportional sein wird. Nimmt man die Ebene dieses Querschnittes für die der xy, und setzt $r^2 = x^2 + y^2$, $u = \frac{Vx}{r}$, $v = \frac{Vy}{r}$, $w = cz$, wo V die Verschiebung in der Richtung des Halbmessers r bezeichnet, welche blos von r abhängt, so erhält man:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{x}{r} \cdot \frac{d\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right)}{dr}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{y}{r} \cdot \frac{d\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right)}{dr},$$

$$\Theta = c + \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}.$$

Die dritte der Gleichungen 3. wird hierdurch unmittelbar erfüllt, die beiden ersten geben gemeinschaftlich:

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right)}{dr} = 0, \text{ also } \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} = 2a, \text{ wo } a \text{ eine Constante;}$$

$$\text{hieraus } V = ar + \frac{b}{r}, \quad \Theta = c + 2a.$$

Hieraus folgt:

$$X = A\left(4a + c - 2b\,\frac{(x^2 - y^2)}{r^4}\right),\; Y = -A\,\frac{4bxy}{r^4},\; Z = 0,$$

$$Y' = Y,\; Y' = A\left(4a + c + 2b\,\frac{(x^2 - y^2)}{r^4}\right),\; Z' = 0,\; X'' = 0,$$

$$Y'' = 0,\; Z'' = A\,(2a + 3c).$$

Ist R der innere, R′ der äussere Halbmesser des Cylinders, P der innere, P′ der äussere Druck, so hat man für $y = 0, x = r = R$, $X = -P$, und für $y = 0$, $x = r = R'$, $X = -P'$. Ferner muss das Product aus der constanten Kraft Z'' in die Fläche des ringförmigen Querschnitts gleich der Resultante des von aussen und innen auf die Grundfläche wirkenden Druckes, also $Z''(R'^2 - R^2)\pi = PR^2\pi - P'R'^2\pi$ sein. Diese Bedingungen liefern die Constanten: $a = c = \frac{PR^2 - P'R'^2}{5A(R'^2 - R^2)}$, $b = \frac{R^2R'^2(P - P')}{2A(R'^2 - R^2)}$, wodurch die gesuchten Componenten $X, Y, Z, X', \ldots$ völlig bestimmt werden.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem der Druck in dem cylindrischen Ringe sich ändert, betrachte man irgend eine Meridian-Ebene, wofür man diejenige nehmen kann, für welche $y = 0$. Man findet für $y = 0$, $x = r$,

$$A = X = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R'^2 - R^2} - \frac{R^2R'^2(P - P')}{r^2(R'^2 - R^2)},\; B = Y' = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R'^2 - R^2}$$

$$+ \frac{R^2R'^2(P - P')}{r^2(R'^2 - R^2)},\; C = Z'' = \frac{PR^2 - P'R'^2}{R'^2 - R^2}.$$

Die übrigen Componenten, also die Tangentialkräfte, sind sämmtlich Null, mithin geben vorstehende Werthe unmittelbar die Drucke auf die Hauptschnitte an, welche nach den hier angenommenen Axen x, y, z wirken. Ist der innere Druck P grösser als der äussere P′, und auch $PR^2 > P'R'^2$, so ist für jeden Punct des cylindrischen Querschnittes, oder für jedes zwischen R und R′ liegende r, A negativ, hingegen B und C positiv; also findet in jeder Meridian-Ebene in der Richtung des Halbmessers Druck, hingegen senkrecht auf dieser Ebene und parallel der Axe des Cylinders Zug Statt. Nach den übrigen Richtungen bezeichnen, für irgend einen Punct des cylindrischen Ringes, die Halbmesser des Ellipsoids: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ Zug oder Druck, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb des durch die Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z}{C} = 0$ bestimmten Kegels liegen, dessen Axe (x) in die Richtung des Halbmessers des Cylinders fällt.

Die grösste unter allen vorkommenden Spannungen liefert der Werth von B für $r = R$, nämlich $\frac{P(R^2 + R'^2) - 2P'R'^2}{R'^2 - R^2}$. Soll diese Spannung die Grenze der vollkommenen Elasticität nicht überschreiten, so muss danach der Werth von R' bestimmt werden. Es sei a die grösste zulässige Spannung, welche für Schmiedeeisen 14 Kilogr. auf das Quadrat-Millimeter beträgt, für Gusseisen 10 Kil., für Kanonenmetall 6 Kil., für Messing 4 Kil., so ergiebt sich, indem der obige Ausdruck $=$ a gesetzt wird,

$$\frac{R'}{R} = \frac{\sqrt{P + a}}{\sqrt{2P' - P + a}}.$$

Diese Formel führt auf den Schluss, dass wenn der innere Druck P nicht kleiner ist als $2P' + a$, nothwendig eine Zerreissung erfolgt, wie dick auch die cylindrische Wand sei. Ist der äussere Druck der atmosphärische, also 0,01 Kil. auf das Quadrat-Millim., so findet man aus den obigen Werthen von a die Grenze des inneren Druckes $P = 2P' + a = 14{,}02$ Kil. oder 1402 Atmosphären für einen Cylinder von geschmiedetem Eisen; eben so 1002 Atm. für Gusseisen, 602 Atm. für Kanonenmetall und 402 Atm. für Messing. Da inzwischen die Grösse a durch Dehnung eines Stabes gefunden ist, auf welchen seitlich nur der Druck der Luft wirkte, während hier ein sehr beträchtlicher Seitendruck in der Richtung des Halbmessers des Cylinders besteht, so entsteht die Frage, ob nicht der Werth von a nach Maassgabe des Seitendruckes einer Veränderung unterworfen sei; zu deren Beantwortung es an Versuchen fehlt.

4. Anwendung auf einen der Torsion und zugleich einem constanten Drucke an der Oberfläche ausgesetzten geraden Cylinder von kreisförmiger Grundfläche. z sei die Längenaxe, anfangend von einem nach der Richtung der z als unbeweglich angenommenen Querschnitte, dessen Mittelpunct ganz unbeweglich und Anfang der Coordinaten ist. Nimmt man an, dass jedes Theilchen einen seiner Entfernung von der Axe ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) und seinen z proportionalen Kreisbogen, in einer mit xy parallelen Ebene, beschreibt, und sich zugleich dem Anfange der Coordinaten um eine seinem Abstande von diesem ($= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) proportionale Grösse nähert, so ergeben sich folgende den Differential-Gleichungen 3. genügende Verschiebungen:

$$u = - tzy - ax, \quad v = tzx - ay, \quad w = - az$$

wo a und t noch zu bestimmende Constanten sind. Hieraus folgt: $X = -5Aa$, $Y = 0$, $Z = -Aty$, $X' = 0$, $Y' = -5Aa$, $Z' = Atx$, $X'' = -Aty$, $Y'' = Atx$, $Z'' = -5Aa$. Da für $y = 0$, $Z = 0$ wird, so folgt, dass der auf ein Element der Cylinderfläche wirkende Druck normal und $= -5Aa$ ist. Die Resultante von X'' und Y'' ist die Torsions-Kraft, ihre Intensität $= Atr$, und das gesammte Torsions-Moment $M = \iint Atr^3 dr d\varphi = \frac{1}{2}\pi AtR^4$, wenn R der äussere Halbmesser des (vollen) Cylinders ist; daher $t = \frac{2M}{AR^4\pi}$. Ist P der äussere Druck, so hat man nach $P = 5Aa$; hierdurch sind die Constanten a und t bestimmt. Der Winkel der Torsion Θ ist der Werth von $\frac{v}{x}$ für $y = 0$, oder von $\frac{u}{y}$ für $x = 0$; derselbe ist $\Theta = tz = \frac{2Mz}{AR^4\pi}$, also der Länge z des Cylinders direct und der vierten Potenz seines Halbmessers umgekehrt proportional, wie der Erfahrung gemäss ist. Kennt man Θ und $\frac{Mz}{R^4}$ aus Beobachtung, so ergiebt sich A. Die in der Physik von Biot mitgetheilten Torsions-Beobachtungen von Coulomb geben $A = 7493$ Kil. für Eisen, $A = 2248$ Kil. für Messing, wofür andere auf Dehnung beruhende Versuche 8000 und 2510 gegeben haben. Die durch Torsion erhaltenen Werthe verdienen vor den durch Dehnung erhaltenen den Vorzug.

5. Anwendung auf eine Kugel, deren Theile sich nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung anziehen. Jedes Theilchen wird sich dem Mittelpuncte um eine blos von seinem Halbmesser r abhängige Grösse U nähern. Sind x, y, z die Coordinaten des Theilchens aus dem Mittelpuncte, und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so sind demnach die Verschiebungen $u = U\frac{x}{r}$, $v = U\frac{y}{r}$, $w = U\frac{z}{r}$. Die auf das Theilchen wirkenden Kräfte sind $X_1 = -cx$, $Y_1 = -cy$, $Z_1 = -cz$, wo c eine Constante ist. Man sieht sogleich, dass u, v, w die partiellen Ableitungen von $\int U dr$ sind; folglich $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$. Eben so sind X, Y, Z die Ableitungen von $-\frac{1}{2}cr^2$. Daher gehen die Gleichungen 3. in folgende über:

$$3\frac{d\Theta}{dx} - \frac{c}{2A}\cdot\frac{d.r^2}{dx} = 0,\ 3\frac{d\Theta}{dy} - \frac{c}{2A}\cdot\frac{d.r^2}{dy} = 0,\ 3\frac{d\Theta}{dz} - \frac{c}{2A}\cdot\frac{d.r^2}{dz} = 0,$$

woraus $3\Theta = \frac{c}{2A} r^2 + a$ folgt; a ist eine Constante. Nun ist $\Theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r}$; folglich $\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} = \frac{cr^2}{6A} + \frac{a}{3}$; woraus sich als Integral ergiebt: $U = \frac{c}{30\,A} r^3 + \frac{a}{9} r + \frac{b}{r^2}$, wo b die Constante. Diese muss aber, für eine volle Kugel, Null sein, damit nicht für $r = 0$, U unendlich werde. Also ist $U = \frac{c}{30\,A} r^3 + \frac{a}{9} r$. Für $x = R$, $y = 0$, $z = 0$, findet man $X = \frac{5Aa}{9} + \frac{11 \cdot c}{30} R^2$; nimmt man nun an, dass der Druck an der Oberfläche für $r = R$ Null ist, so muss der vorstehende Werth von X verschwinden, woraus $\frac{a}{9} = -\frac{11}{150} \cdot \frac{cR^2}{A}$ hervorgeht, und mithin U und Θ folgende Werthe erhalten:

$$U = \frac{c}{30\,A} \cdot r^3 - \frac{11}{150} \frac{cR^2}{A} \cdot r, \quad \Theta = \frac{c}{6A} r^2 - \frac{11}{50} \frac{cR^2}{A}.$$

Daher die Verrückungen

$$u = -\frac{cx}{30A}\left(\frac{11}{5}R^2 - x^2 - y^2 - z^2\right), \quad v = -\frac{cy}{30A}\left(\frac{11}{5}R^2 - x^2 - y^2 - z^2\right),$$

$$v = -\frac{cz}{30\,A}\left(\frac{11}{5}R^2 - x^2 - y^2 - z^2\right),$$

aus welchen man für die an dem Puncte $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ wirkende Kräfte folgende Werthe findet:

$$X = -\frac{11 \cdot c}{30}(R^2 - r^2), \quad Y' = -\frac{c}{30}(11\,R^2 - 7r^2),$$

$$Z'' = -\frac{c}{30}(11\,R^2 - 7r^2).$$

Die Tangentialkräfte sind Null. Die Resultante der an der Oberfläche wirkenden Anziehung ist cR, nennt man daher δ das Gewicht der Volumen-Einheit der Masse der Kugel, an der Oberfläche, so ist $cR = \delta$, also $c = \frac{\delta}{R}$ Der Druck in der Richtung des Halbmessers beträgt für $r = R - h$, also in der Tiefe h, $-X = \frac{11}{30}\,\delta\left(2h - \frac{h^2}{R}\right)$ oder für eine geringe Tiefe nahe $\frac{11}{15}\,\delta h$. Dagegen beträgt der Druck in einer auf dem Halbmesser senkrechten Ebene:

$$-Y' = \frac{\delta}{30}\left(11\,R - 7\,\frac{(R-h)^2}{R}\right) = \frac{\delta}{30}\left(4\,R + 14h - \frac{7h^2}{R}\right),$$

also für kleine h nahe $= \frac{2}{15}\,\delta R$; die Theilchen in der Nähe der Oberfläche erleiden daher in der Richtung des Halbmessers nur

einen sehr kleinen, dagegen seitlich einen ausnehmend grossen Druck, der dem Gewicht einer über der gedrückten Fläche aus der Masse der Kugel errichteten Säule von der Höhe $= \frac{2}{15}$ des Halbmessers der Kugel gleichkommt.

Noch andere Anwendungen findet man in der Original-Abhandlung. Zu bemerken ist noch, dass die unter 3. angegebenen Fundamental-Gleichungen schon früher von Navier aufgestellt worden sind (Bulletin des sciences par la société philomathique pour l'année 1823, Seite 181).

---

5. Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, auctore C. F. Gauss. Gottingae 1830.

In der von Laplace begründeten Theorie der Capillar-Erscheinungen vermisste man noch einen strengen Beweis der für die Grenze der freien Oberfläche geltenden Bedingungs-Gleichung, welchen Gauss in genannter Schrift an eine den Gegenstand in grösster Allgemeinheit umfassende Untersuchung geknüpft hat. Diese geht von der Annahme mehrerer physischer Puncte $m, m', m'', \ldots$ in welchen die gleichnamigen Massen vereinigt gedacht werden, und auf welche folgende Kräfte wirken: 1. die Schwere, 2. eine gegenseitige Anziehung, welche den Massen proportional ist und für die Einheiten der Massen durch eine Function $f(r)$ ihrer Entfernung r dargestellt wird; 3. eine Anziehung fester Puncte von den Massen $M, M', M'', \ldots$, welche durch eine Function $F(r)$ dargestellt wird. Bezeichnet (mm') die Entfernung zwischen m und m', so ist $-mm'f(m,m').\delta(m,m')$ das virtuelle Moment der auf m von m' ausgeübten Anziehung, insofern unter $\delta(m,m')$ das auf eine Verschiebung von m bezügliche partielle Differential von (m,m') verstanden wird; eben so ist $-mm'f(m,m').\delta'(m,m')$ das virtuelle Moment der von m' auf m ausgeübten Anziehung, insofern $\delta'(m,m')$ sich auf eine Verschiebung von m' bezieht; bemerkt man noch, dass die Summe $\delta(m,m') + \delta'(m,m') =$ dem vollständigen Differentiale von (m,m'), also $= d(m,m')$ ist, so ergiebt sich $-mm'f(m,m')\,d(m,m')$ als das gesammte virtuelle Moment der gegenseitigen Anziehung zwischen m und m'. Ferner ist $-mMF(m,M)\,d(m,M)$ das virtuelle Moment der von dem festen Puncte M auf m ausgeübten Anziehung; endlich $-gmdz$ das vir-

tuelle Moment des Gewichtes von m, insofern die Axe z vertical und die Richtung nach oben als die positive angesehen wird. Setzt man $-\int fx.dx = \varphi x$, $-\int Fx.dx = \Phi x$, so sieht man leicht, dass die Summe der virtuellen Momente aller auf die Puncte m, m', m'', ... wirkenden Kräfte das Differential von folgendem mit Ω bezeichneten Ausdrucke ist, nämlich:

$$\Omega := \Sigma m\,[-gz + \tfrac{1}{2}m'\,\varphi(m,m') + \tfrac{1}{2}m''\,\varphi(m,m'') + \tfrac{1}{2}m'''\,\varphi(m,m''') + \ldots + M\,\Phi(m,M) + M'\,\Phi(m,M') + M''\,\Phi(m,M'')]$$

wo Σ die Summe aller Werthe anzeigt, welche der eingeklammerte Ausdruck erhält, wenn darin zuerst m mit m', dann m mit m'', u. s. f. vertauscht wird. Für die Lage des Gleichgewichtes muss das Differential von Ω Null oder negativ sein, oder die Function Ω muss für keine unendlich kleine Verrückung aus der Lage des Gleichgewichtes eine positive Zunahme erhalten.

Tritt an die Stelle der getrennten Puncte M, M', M'', ... ein den Raum S mit unveränderlicher Dichtigkeit C erfüllender Körper, so ist CdS das Massenelement desselben, und die Summe $M\,\Phi(m,M) + M'\,\Phi(m,M') + M''\,\Phi(m,M'')$ verwandelt sich in das Integral $C\int dS\,\Phi(m,dS)$, das über den ganzen Raum S auszudehnen ist; und werden noch die Puncte m, m', m'', ... als Elemente einer mit constanter Dichtigkeit c den Raum s erfüllenden Masse angesehen, so verwandelt sich der Ausdruck Ω in folgenden:

$$\Omega = -gc\int zds + \tfrac{1}{2}cc\iint ds\,ds'\,\varphi(ds,ds') + cC\iint ds\,dS\,\Phi(ds,dS). \quad 1.$$

Hier bezeichnen ds und ds' Elemente desselben Raumes s, dessen Massentheilchen nach der Annahme einander anziehen; (ds, dS) die Entfernung zwischen einem Elemente des Raumes s und einem des Raumes S.

Die characteristische Eigenschaft flüssiger Körper besteht in der vollkommenen Beweglichkeit ihrer Theilchen, vermöge deren sie jede Gestalt annehmen können und dem kleinsten Drucke nachgeben, der ihre Gestalt zu ändern strebt. Bei der gegenwärtigen Untersuchung wird das Volumen jedes flüssigen Theilchens als unveränderlich angenommen; der Werth von Ω kann mithin nur durch Aenderung der Gestalt des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, dessen Volumen immer dasselbe bleibt, eine Aenderung erleiden, und muss, für das Gleichgewicht, bei unveränderlich gegebenem Volumen der Flüssigkeit, durch keine unendlich kleine Aenderung ihrer Gestalt eine Zunahme erhalten oder in diesem Sinne ein Maximum sein.

Das erste Glied in dem obigen Ausdrucke für Ω stellt das Product aus dem Gewichte der Flüssigkeit in die Tiefe ihres Schwerpunctes dar. Das zweite und das dritte Glied stellen besondere Fälle einer allgemeinen Aufgabe dar, nämlich wenn irgend zwei Räume gegeben sind, die Summe der Producte zu finden, deren jedes besteht aus einem Element des ersten Raumes, multiplicirt in ein Element des zweiten und in eine Function der Entfernung zwischen beiden Elementen. Das zweite Glied bezieht sich auf den Fall, wo beide Räume sich völlig decken, das dritte auf den Fall, wo sie ganz ausser einander liegen; im Allgemeinen können beide Räume zum Theil in, zum Theil ausser einander liegen.

Es bezeichne μ irgend einen Punct im Raume s oder ausser ihm. Um das über den ganzen Raum s sich erstreckende dreifache Integral $\int ds\, \varphi(\mu, ds)$ auf ein zweifaches zurückzuführen, sei um den Mittelpunct μ eine Kugel vom Halbmesser 1 beschrieben, von deren Oberfläche $d\Pi$ ein Element vorstelle. Beschreibt man noch um den Mittelpunct μ zwei Kugeln von den Halbmessern r und $r + dr$, welche die Pyramide P, deren Spitze μ, Grundfläche $d\Pi$, oder ihre Fortsetzung, innerhalb des Raumes s schneiden, so ist $r^2 d\Pi dr$ das zwischen diesen Kugelflächen enthaltene Element der Pyramide oder des Raumes s, und man hat, da $(\mu, ds) = r$ ist, $\int ds\, \varphi(\mu, ds) = \int r^2 d\Pi dr \,.\, \varphi r$. Liegt μ ausserhalb des Raumes s, und sind r', r'', r''', u. s. f. die Werthe von r (alle positiv zu nehmen), bei welchen die Pyramide P in den Raum s zum erstenmale eintritt, dann austritt, dann wieder eintritt, u. s. f., so erhält man, allgemein $\int r^2\, \varphi r\, dr = -\psi r$ setzend, durch Integration nach r,

$$\int r^2 d\Pi dr\, \varphi r = d\Pi\,(\psi r' - \psi r'' + \psi r''' - \dots)$$

Es sei ferner dt' das Element, welches die Pyramide bei ihrem Eintritt in den Raum s, also für $r = r'$, von der Oberfläche desselben abschneidet, q' der Winkel zwischen der von einem Punct von dt' nach μ gehenden Geraden r' und der in dt' nach aussen errichteten Normale der Oberfläche des Raumes s; ähnliche Bedeutung haben dt'', q'' für $r = r''$, wo nämlich der Winkel q'' wieder durch die im Element dt'' nach aussen errichtete Normale und die von dt'' nach μ gehende Gerade r'' gebildet wird, u. s. f., so hat man

$$d\Pi = +\frac{dt' \,.\, \cos q'}{r' r'} = -\frac{dt'' \,.\, \cos q''}{r'' r''} = +\frac{dt''' \,.\, \cos q'''}{r''' r'''} = \dots$$

folglich das gesuchte Integral:

$$\int d\Pi(\psi r' - \psi r'' + \psi r''' - \ldots) =$$
$$\int\left(\frac{dt'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{dt''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{dt'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \ldots\right).$$

Daher ergiebt sich der Werth des über den ganzen Raum s zu erstreckenden Integrals $\int ds\,\varphi(\mu, ds)$, wenn μ ausserhalb s liegt, gleich dem über die ganze Oberfläche t des Raumes s auszudehnenden Integrale $\int\frac{dt.\cos q.\psi r}{rr}$, wodurch das vorgelegte dreifache Integral auf ein zweifaches gebracht ist, in welchem q den Winkel zwischen der im Elemente dt der Fläche t nach aussen errichteten Normale und der von diesem Elemente nach μ gehenden Geraden r bedeutet.

Liegt μ in s, und sind r', r'', r''', ... wie oben die Werthe von r, für welche P die Oberfläche des Raumes s zum ersten, zweiten, dritten, ... Male schneidet, so giebt die erste Integration nach r:

$$d\Pi(\psi o - \psi r' + \psi r'' - \psi r''' + \ldots\ldots)$$

und zugleich ist $d\Pi = -\frac{dt'.\cos q'}{r'r'} = +\frac{dt''.\cos q''}{r''r''} = -\frac{dt'''.\cos q'''}{r'''r'''}\ldots.$

folglich das gesammte Integral

$$\int ds\,\varphi(\mu, ds) = \int d\Pi.\psi o + \int\frac{dt.\cos q}{rr} = 4\pi\psi o + \int\frac{dt.\cos q.\psi r}{rr}$$

für einen innern Punct μ. Liegt μ in der Oberfläche t, so ist im vorstehenden Ausdruck $2\pi\psi o$ anstatt $4\pi\psi o$ zu setzen, wenn die Oberfläche an dieser Stelle keine Spitze oder Kante darbietet (welcher besonderen Fälle in diesem Auszuge überhaupt nicht erwähnt wird). Durch vorstehende Betrachtung wird das sechsfache Integral $\iint ds\,dS\,\varphi(ds, dS)$ auf ein fünffaches gebracht, denn man hat

$$\int ds\,\varphi(ds, dS) = \int\frac{dt.\cos q.\psi(dt, dS)}{(dt, dS)^2},\ \text{wenn dS ausserhalb s,}$$

hingegen $= 4\pi\psi o + \int\frac{dt.\cos q.\psi(dt, dS)}{(dt, dS)^2}$, wenn dS innerhalb s.

Bezeichnet daher σ den Raum, welcher beiden Räumen s und S gemeinschaftlich angehört, so ergiebt sich

$$\iint ds\,dS\,\varphi(ds, dS) = 4\pi\sigma\psi o + \iint\frac{dS.dt.\cos q.\psi(dt, dS)}{(dt, dS)^2}.$$

Zur Fortsetzung der Reduction betrachte man das dreifache Integral $\int\frac{dS.\cos q.\psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2}$, in welchem μ einen Punct der Oberfläche t und q die Neigung der daselbst nach aussen errichteten Normale gegen die von μ nach dS gerichtete Gerade bezeich-

net. Denkt man sich um μ eine Kugel vom Halbmesser 1 beschrieben, und schneidet die aus der Spitze μ auf dem Elemente der Kugelfläche $d\Pi$ errichtete Pyramide die Oberfläche T des Raumes S in den Elementen dT', dT'', ..., für welche $(\mu, dS) = R$ die Werthe R', R'', ... hat, und wo Q', Q'', ... die Neigungen der nach aussen gerichteten Normalen gegen die nach μ gerichteten Geraden sind, so ist $d\Pi = \pm \frac{dT' \cos Q'}{R'R'} = \mp \frac{dT'' \cos Q''}{R''R''} = \ldots$; die oberen oder unteren Zeichen gelten je nachdem μ ausser oder in dem Raume S liegt. Da ferner $dS = R^2 \, d\Pi \, dR$, so wird $\frac{dS \,.\, \cos q \,.\, \psi(R)}{RR} = d\Pi dR \cos q \,.\, \psi R$, und wenn man $\int dR \,.\, \psi R = -\vartheta R$ setzt, so erhält man durch Integration nach R:
$\int \frac{dS \,.\, \cos q \,.\, \psi R}{RR} = d\Pi \cos q \,(\vartheta R' - \vartheta R'' + \vartheta R''' - \ldots)$ wenn μ ausser S liegt, oder $= d\Pi \cos q \,(\vartheta o - \vartheta R' + \vartheta R'' - \vartheta R''' \ldots)$ wenn μ in S liegt. Führt man noch für $d\Pi$ die obigen Ausdrücke, jeden an seiner Stelle ein, so ergiebt sich der Werth des dreifachen Integrals $\int \frac{dS \,.\, \cos q \,.\, \psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2} = \int \frac{dT \,.\, \cos q \cos Q \,.\, \vartheta R}{RR}$ für ein ausser S liegendes μ, wo das Integral über die ganze Oberfläche T von S auszudehnen ist. Für ein in S befindliches μ gilt derselbe Ausdruck noch vermehrt um $\vartheta o \,.\int d\Pi \cos q$. Da q die Neigung der in dem Elemente $\mu = dt$ auf der Fläche t nach aussen errichteten Normale gegen die von μ nach einem Elemente des Raumes S gezogene Gerade bedeutet, welche, wenn μ in S liegt, von diesem Puncte aus jede beliebige Richtung haben kann, so heben sich die Elemente des über die ganze Kugelfläche auszudehnenden Integrals $\int d\Pi \,.\, \cos q$ paarweise auf (nämlich ihre zu q und $\pi - q$ gehörigen Werthe); folglich ist dieses Integral Null, und der für das äussere μ geltende Werth besteht auch unverändert für das innere. Liegt aber der Punct μ in der Oberfläche, so ist dem obigen Ausdrucke ebenfalls das Integral $\vartheta o \,.\int d\Pi \cos q$ beizufügen, die Integration aber nur über diejenigen Elemente der Kugelfläche auszudehnen, deren von μ ausgehende Halbmesser ihren zunächst an μ liegenden Theil innerhalb S haben. Beschränken wir uns auf die Annahme, dass die Oberfläche von S und s einander in μ berühren, so ist q die Neigung eines Halbmessers gegen den in Bezug auf s nach aussen gerichteten Theil der gemeinsamen Normale beider Oberflächen; man hat ferner $d\Pi = \sin q \,.\, d\psi \, dq$, und indem

man von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ integrirt, $\int d\Pi \cos q = 2\pi \int \sin q \cos q\, dq$, welches Integral in Bezug auf q von $q = 0$ bis $q = \frac{\pi}{2}$ oder von $q = \frac{\pi}{2}$ bis $q = \pi$ zu nehmen ist, je nachdem die Flächen s und S in μ auf verschiedenen oder auf einerlei Seite ihrer gemeinsamen Berührungs-Ebene liegen, und mithin in dem ersten dieser Fälle $= + \pi$, im zweiten $- \pi$ wird.

Zusammengenommen ergiebt sich aus diesen Betrachtungen das Integral $\int\int ds\, dS\, \varphi\, (ds, dS)$, wenn die beiden Räume s und S den Raum σ gemein haben, und wenn sie sich in der Fläche ε' von aussen, in der Fläche ε von innen berühren, folgender Werth:

$$4\pi\sigma\psi o - \pi\varepsilon\vartheta o + \pi\varepsilon'\vartheta o + \int\int \frac{dt\, dT \,.\, \cos q\, \cos Q \,.\, \vartheta\, (dt, dT)}{(dt, dT)^2}, \quad \text{A.}$$

welcher noch eine vierfache Integration über die Oberflächen t und T erfordert. In diesem Ausdrucke ist q die Neigung einer in dt auf t nach aussen errichteten Normale gegen die von dt nach dT gehende Gerade, und Q die Neigung der in dT auf T nach aussen errichteten Normale gegen dieselbe, aber von dT nach dt gerichtete, Gerade.

Die von Laplace der Theorie der Capillar-Erscheinungen zu Grunde gelegte Annahme ist bekanntlich diese, dass die Functionen fr und φr für jeden messbaren Werth von r verschwinden, und nur für sehr kleine r merkliche Werthe haben. Gauss bestimmt sie noch näher dahin, dass wenn M irgend eine Masse bezeichnet, wie sie in den Versuchen vorkommt und welche mithin gegen die Erdmasse verschwindet, die Intensität $=$ M.fr, mit welcher diese als Punct gedachte Masse auf einen in der Entfernung r liegenden Punct anziehend wirkt, gegen die Wirkung der Schwere in diesem Puncte verschwindet, sobald r einen messbaren Werth hat. Da diese Voraussetzung nur angenähert richtig ist, so besitzt auch die darauf gegründete Theorie nicht mathematische, wohl aber solche Genauigkeit, welche den genauesten Versuchen, die man gegenwärtig anstellen kann, völlig entspricht.

Unter fr hat man nur den Theil der Anziehung zu verstehen, welcher nach Weglassung des dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Theiles übrig bleibt; denn dieser weggelassene Theil kann unter allen Umständen nur eine unmerkliche Aenderung der Schwere bewirken. Ist nämlich eine gegen die Erdmasse verschwindende gleichartige Masse M als Kugel gestaltet, so

sieht man leicht, dass ihre Anziehung auf einen Punct ihrer Oberfläche gegen die Schwere in diesem Puncte verschwindet; ferner lässt sich zeigen, dass die grösste Anziehung, welche diese Masse M nach dem Gravitationsgesetze ausüben kann, sich zu ihrer Anziehung als Kugel auf einen Punct ihrer Oberfläche wie $3 : \sqrt[3]{25}$ verhält und mithin mit dieser zugleich verschwindend klein ist. Um dieses Verhältniss zu beweisen, bemerke man, dass die Masse M, um die grösste Anziehung auszuüben, ganz auf einer Seite des angezogenen Punctes liegen muss, dass ihre Querschnitte senkrecht auf der Richtung der resultirenden Anziehung (welche die Axe der x sei) Kreise sein müssen, deren Mittelpuncte in x liegen, und dass der angezogene Punct sich in der Oberfläche des Körpers, nämlich in dessen Scheitel, befinden muss. Denn werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann man allemal durch Verlegung von Theilen der Masse die Anziehung in der Richtung der Axe x vergrössern. Nimmt man den Ort des angezogenen Punctes zum Anfange der x, und bezeichnet mit r den Halbmesser des zur Abscisse x gehörigen Querschnittes, so ergiebt sich aus diesen Bedingungen für die resultirende Anziehung X, die Dichtigkeit = 1 gesetzt,

$$X = 2\pi \int_0^l \left(1 - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) dx$$

wo l der Werth von x am Ende des Körpers ist. Zugleich ist $\pi \int_0^l r^2 dx$ der Ausdruck für die Masse M, oder wenn R den Halbmesser der aus der Masse M gebildeten Kugel bezeichnet, so hat man $\int_0^l r^2 dx = \frac{4}{3} R^3$, als Bedingung, unter welcher X seinen grössten Werth erhalten soll. Hieraus folgt $h^4 x^2 = (r^2 + x^2)^3$ oder $r^2 = h^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} - x^2$ als Gleichung für die Meridian-Curve des gesuchten Umdrehungskörpers, in welcher h eine Constante bezeichnet, und folglich:

$$X = 2\pi l \left(1 - \frac{3}{5}\left(\frac{l}{h}\right)^{\frac{2}{3}}\right), \quad \frac{3}{5} h^{\frac{4}{3}} l^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} l^3 = \frac{4}{3} R^3.$$

Der grösste Werth von X findet Statt für $l = h$, $h = R \sqrt[3]{5}$, nämlich $X = \frac{4\pi R}{\sqrt[3]{25}}$. Als Kugel übt die Masse M auf einen Punct ihrer Oberfläche die Anziehung $A = \frac{4\pi R}{3}$; folglich ist $X : A = 3 : \sqrt[3]{25}$.

Versteht man daher unter fr den von der Gravitation befreiten Theil der Anziehung, so wird das Integral $\int_r^\infty fr.\,dr = \varphi r$ für jeden merklichen Werth von r Null sein, für unmerkliche r aber merkliche Werthe haben, die mit abnehmendem r wachsen; für $r = 0$ kann sogar $\varphi o = \infty$ sein. Setzt man ferner $\int_r^\infty r^2 \varphi r\, dr = \psi r$, oder nach Gauss genauer $\int_r^a r^2 \varphi r\, dr = \psi r$, wo a eine constante messbare Grösse bezeichnet, so ist ψr ebenfalls für jedes messbare r, bis zur Grenze a, unmerklich, hingegen erhält es für unmerkliche r, merkliche, und mit abnehmendem r wachsende Werthe; die Erscheinungen fordern jedoch, dass ψo einen endlichen Werth habe, den man sich als sehr gross zu denken hat. Es sei ferner $\int_r^a \psi r\,.\, dr = \vartheta r$, so ist ebenfalls ϑr nur für sehr kleine r merklich; ferner aber lässt sich beweisen, dass der Quotient $\frac{\vartheta r}{\psi r}$, welcher offenbar eine lineare Grösse ist, für $r = 0$ einen unmerklichen Werth hat. Denn da ψr von ψo an so schnell abnimmt, dass es für jedes messbare r unmerklich wird, so ist der Werth von r, für welchen $\psi r = \frac{1}{2}\psi o$ wird, unmessbar klein; er sei ϱ. Nun ist $\int_o^R \psi r dr = \vartheta o - \vartheta R$, oder $\int_o^R (\psi o - \psi r)\, dr = R\psi o - \vartheta o + \vartheta R$. Setzt man $R = \frac{\vartheta o}{\psi o}$ und nimmt an, dass R eine messbare Grösse habe, so wäre offenbar $\int_o^R (\psi o - \psi r)\, dr > \int_\varrho^R (\psi o - \psi r)\, dr > \int_\varrho^R (\psi o - \psi \varrho)\, dr$, weil für $r > \varrho$, $\psi r < \psi \varrho$, mithin $\psi o - \psi r > \psi o - \psi \varrho$ ist; folglich wäre $\int_o^R (\psi o - \psi r)\, dr = \vartheta R > (\psi o - \psi \varrho)\,(R - \varrho)$, oder weil $\psi \varrho = \frac{1}{2}\psi o$, $\vartheta R > \frac{1}{2}\psi o\,.\,(R - \varrho)$, mithin ϑR eine messbare Grösse, was nicht angeht, da ϑR für ein messbares R verschwindend klein sein muss. Daher kann $R = \frac{\vartheta o}{\psi o}$ keine messbare Grösse haben.

Betrachten wir zunächst das Integral $\int \frac{dt\,.\cos q\,.\cos Q\,.\,\vartheta\,(\mu, dt)}{(\mu, dt)^2}$. in welchem μ irgend ein Element der Fläche T bezeichnet, so sind alle Elemente desselben, welche zu einem messbaren Werthe des Abstandes (μ, dt) gehören, offenbar Null, weil für ein messbares r, $\vartheta r = 0$ ist; mithin hat das vorstehende Integral nur dann einen messbaren Werth, wenn der Punct μ von der Fläche t unmerklich absteht, und braucht nur auf die dem Puncte μ sehr nahe

liegenden Theile von t ausgedehnt zu werden. Setzt man ferner für $\frac{dt \,.\, \cos q}{(\mu, dt)^2}$ wieder $\pm d\Pi$, indem man unter $d\Pi$, wie früher, das Element einer um den Mittelpunct μ mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kugel versteht, und von den Vorzeichen das obere oder untere nimmt, je nachdem die äussere oder innere Seite der Fläche t nach μ gekehrt ist, so verwandelt sich das obige Integral in $\int \pm d\Pi \,.\, \cos Q \,.\, \vartheta\, (\mu, dt)$. Liegt nun μ in der Oberfläche selbst, so ist der Raum, welchen einerseits die durch μ an t gelegte Berührungs-Ebene, andererseits die Folge der von μ nach den sehr nahe liegenden Puncten der Fläche t gezogenen und weiter verlängerten Halbmesser auf der Kugelfläche abschneidet, offenbar sehr klein, und mithin verschwindet das vorstehende Integral. Hierbei wird die Fläche in der Umgebung von μ als stetig gekrümmt angenommen.

Befindet sich dagegen μ in einer unmessbar kleinen Entfernung von t, so erhält das Integral $\int \pm d\Pi \,.\, \cos Q \,.\, \vartheta\, (\mu, dt)$ einen endlichen Werth. Denkt man sich von μ aus eine Normale n nach der Fläche t gezogen, setzt $(\mu, dt) = r$, und ist p die feste Gerade, welche mit r den Winkel Q einschliesst (nämlich p die in μ auf der Fläche T nach aussen errichtete Normale), so hat man $\angle\, (rp) = Q$, und setzt man noch $\angle\, (nr) = v$, $\angle\, (np) = k$, endlich die Neigung der Ebene nr gegen np gleich w, so folgt $\cos Q = \cos v \cos k + \sin v \sin k \cos w$, ferner $d\Pi = \sin v \,.\, dw\, dv$, mithin

$$\int d\Pi \,.\, \cos Q \,.\, \vartheta r = \int (\cos v \cos k + \sin v \sin k \cos w) \sin v \,.\, \vartheta r \,.\, dv\, dw.$$

Integrirt man zuerst nach w von 0 bis 2π, so ergiebt sich der Werth: $2\pi \cos k \int \cos v \,.\, \sin v \,.\, \vartheta r \,.\, dv$. Um die noch übrige Integration zu vollziehen, kann man das den Fusspunct der Normale n zunächst umgebende Theilchen der Oberfläche t, auf welches allein die Integration auszudehnen ist, als eben betrachten; bezeichnet man mit ϱ seinen kürzesten Abstand von μ, so ist $r \cos v = \varrho$, mithin $\sin v \,.\, dv = \frac{\varrho\, dr}{r^2}$, daher

$$\int d\Pi \,.\, \cos Q \,.\, \vartheta r = 2\pi\varrho^2 \cos k \,.\, \int \frac{\vartheta r \,.\, dr}{r^3}$$

wo die Integration von $r = \varrho$ bis zu einem beliebig kleinen messbaren r auszudehnen ist. Wird allgemein $\int_r^a \frac{\vartheta r \,.\, dr}{r^3} = \frac{\vartheta' r}{2 r^2}$ gesetzt,

wo a irgend ein messbares r vorstellt, so ist $\int_{\varrho}^{a} \frac{\vartheta r \cdot dr}{r^3} = \frac{\vartheta' \varrho}{2\varrho^2}$, und mithin das obige Integral $= \pi \cos k \cdot \Theta' \varrho$. Daher ist

$$\int \frac{dt \cdot \cos q \cos Q \cdot \vartheta\,(dT, dt)}{(dT, dt)^2} = \int \pm\, d\Pi \cdot \cos Q \cdot \vartheta\,(dT, dt) = \pm\, \pi \cos k \vartheta' \varrho$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem das Element $\mu = dT$ sich auf der äusseren oder inneren Seite der Fläche t, in dem unmessbar kleinem Abstande $= \varrho$ von demselben befindet, und wo k die Neigung der in dT nach aussen errichteten Normale p gegen die von dT auf t gefällte Normale n, deren Länge durch ϱ ausgedrückt wurde, bezeichnet.

Hieraus folgt weiter, dass das Integral

$$\iint \frac{dT\, dt \cdot \cos q \cdot \cos Q \cdot \vartheta\,(dT, dt)}{(dT, dt)^2} = \int \pm\, \pi \cos k \cdot \vartheta' \varrho \cdot dT$$

nur dann einen merklichen Werth haben kann, wenn sich in unmessbar kleiner Entfernung von t ein messbarer Theil von T vorfindet. Da ein solcher von dem Parallelismus mit t nicht merklich abweichen kann, so ist für alle Puncte desselben cos k von + 1 oder von — 1 nicht merklich verschieden; je nachdem nämlich die äussere oder innere Seite von T der Fläche t zugekehrt ist. Da zugleich in dem vorstehenden Integrale das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das entsprechende Element dT auf der äusseren oder inneren Seite von t liegt, so erhält das obige Integral den Werth $= \int \pm\, \pi \vartheta' \varrho \cdot dT$, in welchem das positive Zeichen überall da gilt, wo gleichnamige, das negative, wo ungleichnamige Seiten der Fläche t und T einander zugekehrt sind. Bezeichnet man die Summe aller Theile der ersten Art, für eine beliebige der Flächen t oder T, mit τ', der anderen mit τ, so ist $+ \int \pi \vartheta' \varrho\, d\tau' - \int \pi \vartheta' \varrho\, d\tau$ der Werth dieses Integrals. Setzt man diesen Werth in A., so kommt

$$\iint ds\, dS\; \varphi\,(ds, dS) = 4\pi\sigma\psi o - \pi\varepsilon\vartheta o + \pi\varepsilon'\vartheta o + \pi \int \vartheta' \varrho\, d\tau' - \pi \int \vartheta' \varrho\, d\tau.$$

Um hieraus den Werth von Ω zu bilden, bemerke man, dass für das zweite Glied des Ausdruckes Ω der Raum S mit s zusammenfällt; daher für dieses $\sigma = s$ wird, ferner $\varepsilon = t$, wo t die ganze Oberfläche von s anzeigt, endlich $\varepsilon' = 0$. Ferner ist $\tau' = 0$, wenn im Raume s keine leeren Zwischenräume oder Spalten von messbarer Ausdehnung aber unmessbar kleiner Breite vorkommen, und $\tau = 0$, wenn ϱ keinen Theil von messbarer Ausdehnung aber nur unmessbar kleiner Dicke enthält. Werden solche Fälle, in welchen

τ' und ι nicht Null sind, bei Seite gesetzt, so ergiebt sich der Werth des zweiten Gliedes in Ω gleich: $\frac{1}{2}$ cc ($4\pi s \psi o - \pi t \vartheta o$).

Für das dritte Glied von Ω ist, da die Räume s und S (der Flüssigkeit und des Gefässes) keinen gemeinsamen Theil haben, $\sigma = 0$; ferner ist $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = T =$ der von der Flüssigkeit berührten Fläche des Gefässes; folglich ergiebt sich, wenn man für f, φ, ψ, ϑ die gleichnamigen grossen Buchstaben setzt, der Werth des genannten Theils von Ω gleich $\pi c C T \Theta o$. Zu diesem Werthe kommt noch das Glied $- \pi c C \int \Theta' \varrho \,.\, dT'$, wenn die Flüssigkeit für einen messbaren Theil T′ der Fläche T nur eine unmerkliche Dicke hat. Setzt man, wie vorhin, diesen Fall bei Seite, so erhält Ω den Werth

$$\Omega = - gc \int z ds + \tfrac{1}{2} \pi cc \, (4 s \psi o - t \vartheta o) + \pi c C \Theta o \,.\, T$$

wo t die ganze, T die vom Gefäss berührte Oberfläche der Flüssigkeit ist. Da das Volumen s der Flüssigkeit unveränderlich ist, so folgt, dass der Ausdruck

$$\int z ds + \frac{\pi c \,.\, \vartheta o}{2g} t - \frac{\pi C \,.\, \Theta o}{g} T = W$$

ein Minimum werden muss. Alle Glieder dieses Ausdruckes müssen, gleich dem ersten, von der 4ten Dimension sein; setzt man daher $\frac{\pi c \,.\, \vartheta o}{2g} = \alpha^2$, $\frac{\pi C \,.\, \Theta o}{2g} = \beta^2$, so sind α und β Linien; bezeichnet man noch mit U die freie Oberfläche der Flüssigkeit, so ist $t = T + U$, und

$$W = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\, T + \alpha^2 U. \qquad \text{B.}$$

Aus der Bedingung, dass W ein Minimum sein muss, lässt sich die Erscheinung des Aufsteigens oder Sinkens der Flüssigkeit in Haarröhrchen leicht herleiten. Man denke sich eine gekrümmte Röhre mit zwei verticalen Schenkeln, mit Flüssigkeit gefüllt; es sei a der innere Querschnitt des einen Schenkels, oder genauer die horizontale Projection der freien Oberfläche der Flüssigkeit in diesem Schenkel, b der Umring der Fläche a, ah das Volumen der in diesem Schenkel, zwischen der freien Oberfläche und einer festen unterhalb liegenden Ebene, befindlichen Flüssigkeit, oder h die mittle Höhe der Flüssigkeit über dieser Ebene, von welcher die z anfangen; a′, b′, h′ seien dasselbe für den anderen Schenkel. Wenn nun die Lage der Flüssigkeit eine unendlich kleine Aenderung der Art erleidet, dass beide Theile der freien Oberfläche ihre Gestalt behalten, indem vorausgesetzt wird, dass die inneren Wände beider Schenkel in der Nähe der Oberfläche der Flüssigkeit ver-

tical sind; so ist zuerst die Variation von $\int z ds = a h dh + a'h'dh'$; ferner die Variation von $T: b dh + b'dh'$; endlich die Variation von U gleich Null. Daher wird

$$dW = a h dh + a'h'dh' - (2\beta^2 - \alpha^2)(b dh + b'dh').$$

Da ferner das Volumen s unverändert bleibt, so ist seine Variation $a dh + a'dh' = 0$; die Verbindung dieser Gleichungen giebt, wenn zur Abkürzung $2\beta^2 - \alpha^2 = \gamma$ gesetzt wird, $h - h' = \gamma\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)$ oder

$$h - \gamma\frac{b}{a} = h' - \gamma\frac{b'}{a'}.$$

Ist die zweite Röhre so weit, dass $\frac{b'}{a'}$ wegen der Grösse von a' vernachlässigt werden kann, so kommt $h - h' = \gamma\frac{b}{a}$, woraus sich, wenn der innere Querschnitt ein Kreis ist, ein dem Durchmesser desselben umgekehrt proportionales Aufsteigen oder Sinken ergiebt. Nimmt man die Anfangs-Ebene der h so, dass $h - \gamma\frac{b}{a} = 0$, so wird auch $h' - \gamma\frac{b'}{a'} = 0$; alsdann drücken $ah = \gamma b$, $a'h' = \gamma b'$ die Mengen der Flüssigkeit aus, welche, wenn γ positiv ist, über diejenige Oberfläche gehoben sind, die in Abwesenheit aller Capillar-Anziehung für $\gamma = 0$ Statt finden würde.

Aus der Bedingung, dass W ein Minimum sein soll, lassen sich die zur Bestimmung der Gestalt der Flüssigkeit nöthigen Gleichungen entweder durch Variations-Rechnung, oder auf einem mehr geometrischen Werthe herleiten, welchem seiner Kürze wegen hier der Vorzug zu geben ist. Man denke sich die Gestalt der Flüssigkeit im Gefässe, deren freie Oberfläche mit U, vom Gefäss bedeckte mit T bezeichnet wurde, auf beliebige Weise unendlich wenig geändert; es seien U', T' die freie und die bedeckte Oberfläche nach dieser Aenderung. Die Grenzlinie zwischen U und T, oder der Umring von U, heisse P, der Umring von U' heisse P'. In einem beliebigen Puncte p von U ziehe man die Normale n auf U, ferner ziehe man aus p auf der Fläche U zwei unendlich kleine Linear-Elemente $pg = dl$, $pg' = dl'$, das eine in der Richtung der grössten, das andere in der Richtung der kleinsten Krümmung, welche mithin senkrecht auf einander stehen; so ist $dU = dl \,.\, dl'$ ein Element der Fläche U. Es seien m und m' die zu den Linear-Elementen dl und dl' gehörigen Krümmungsmittelpuncte in n, $mp = R$ $m'p = R'$ die Krümmungshalbmesser, positiv zu nehmen, wenn die

convexe Seite der Fläche U in p nach aussen gekehrt ist, und man nenne π, γ, γ' die Puncte, in welchen die Fläche U′ durch die nöthigenfalls verlängerten Geraden n, mg, m′g′ getroffen wird, oder da eine in der Grenze P errichtete Normale an der Fläche U′ vorbeigehen kann, ohne sie zu treffen, so denke man sich in den Puncten von P′ berührende Ebenen an U′ gelegt; die Normale n wird alsdann die durch diese Berührungs-Ebenen gebildete Fortsetzung der Fläche U′, und zwar in einem der Grenzcurve P′ unendlich nahen Puncte π, treffen. Setzt man $\pi\gamma = d\lambda$, $\pi\gamma' = d\lambda'$, endlich das Element der Normale $p\pi = \delta n$, wobei δn positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem $p\pi$ ausserhalb oder innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes liegt; so ist, weil die Flächen U und U′ in den Puncten p und π unendlich nahe parallel sind, $R : R + \delta n = dl : d\lambda$, oder $d\lambda = dl\left(1 + \frac{\delta n}{R}\right)$, und auf gleiche Weise $d\lambda' = dl'\left(1 + \frac{\delta n}{R'}\right)$, mithin $d\lambda . d\lambda' = dl . dl'\left(1 + \frac{\delta n}{R}\right) \times \left(1 + \frac{\delta n}{R'}\right)$, oder mit Weglassung der zweiten Potenz von δn, $d\lambda . d\lambda' = dU + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \delta n . dU$. Das doppelte Integral $\int d\lambda . d\lambda'$, über die gesammte Oberfläche U ausgedehnt, ist gleich dem Theil der Oberfläche U′, welcher von den von U ausgehenden Normalen getroffen wird, und mit A bezeichnet werde, vermehrt um den von jenen Normalen getroffenen Theil der oben bezeichneten Fortsetzung von U, welcher einen unendlich schmalen, an einem Theil der Grenz-Curve P′, und zwar in Bezug auf die Fläche U′ nach aussen liegenden Streifen B bildet. Es sei noch C der von den Normalen nicht getroffene Theil von U′, welcher einen an dem übrigen Theil von P′ innerhalb liegenden unendlich schmalen Streifen bildet, so hat man $U' = A + C$ und

$$\int d\lambda\, d\lambda' = U + \int dU\, \delta n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = A + B$$

folglich $U' - U = \delta U = \int dU\, \delta n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + C - B.$

In irgend einem Puncte μ der Curve P lege man die Berührungs-Ebene an U, und ziehe senkrecht auf der Tangente an P in μ, in der Berührungs-Ebene, eine von μ in Bezug auf die Fläche U nach innen gerichtete Gerade a. Ferner ziehe man, ebenfalls senkrecht auf der Tangente an P in μ, in der Berührungs-Ebene der Gefässwand eine gerade Linie b, welche von μ in Bezug auf

den Raum der Flüssigkeit nach aussen gerichtet sei; es sei i der Winkel zwischen a und b, also i die Neigung der Wand gegen die freie Oberfläche der Flüssigkeit, im Puncte μ. Es sei μ' ein dem Puncte μ unendlich nahe liegender Punct von P', das lineare Element $\mu\mu'$ sei $= \delta e$, und k seine Neigung gegen die Richtung von b, ϑ seine Neigung gegen a. Da die Ebene der Geraden a, b oder die Normal-Ebene der Curve P senkrecht steht auf der Berührungs-Ebene der Wand, in welcher nicht allein die Gerade b, sondern auch das Linear-Element $\delta e = \mu\mu'$ liegt, weil der Punct μ' der Curve P' unendlich nahe bei μ und, wie dieser Punct, in der Wand des Gefässes liegt, so geben die Richtungen δe, a, b ein rechtwinkliches sphärisches Dreieck, in welchem $\angle(\delta e, a) = \vartheta$ die Hypotenuse, $\angle(\delta e, b) = k$, $\angle(a, b) = i$ die Catheten sind; daher ist $\cos\vartheta = \cos k \cos i$. Nun ist $\delta e . \cos\vartheta$ die Projection von δe auf a, mithin $\delta e . \cos\vartheta . dP$ ein Element des Streifens B oder C, je nachdem Winkel ϑ spitz oder stumpf ist. Folglich ist $C - B = -\int dP . \delta e . \cos\vartheta = -\int dP . \delta e . \cos k \cos i$, die Integration über den ganzen Umring P ausgedehnt. Demnach ist die Variation von U

$$\delta U = U' - U = \int dU \, \delta n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \int dP . \delta e . \cos k \cos i.$$

Ferner ist $\delta e . \cos k$ die Projection von δe auf die Richtung von b, welche auf der Richtung des Elementes dP der Curve P senkrecht steht, und wie dieses in der Berührungs-Ebene der Wand liegt; folglich ist $\delta e . \cos k . dP$ das Element der Variation, welche die bedeckte Oberfläche T der Flüssigkeit erleidet, oder es ist

$$\delta T = \int dP . \delta e . \cos k$$

wo die Integration sich über den Umring P erstreckt. Endlich ist $dU . \delta n$ der Inhalt eines über der Grundfläche dU errichteten Prismas von der Höhe δn, also das Element der Variation des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes s, und da der zu demselben gehörige Werth von z dem zum Flächen-Elemente dU gehörigen z unendlich nahe gleich ist, so ist $z dU \delta n$ das Element der Variation von $\int z ds$, oder $\delta \int z ds = \int z dU \delta n$, das Integral über U ausgedehnt. Das Integral $\int dU . \delta n$ stellt die Variation des Raumes s vor, und muss daher $= 0$ sein, also ist $\delta s = \int dU . \delta n = 0$. Diese Werthe geben für $\delta W = \delta \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,\delta T + \alpha^2 \delta U$ den Ausdruck

$$\delta W = \int dU \delta n \left[z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] - \int dP . \delta e \cos k \left\{\alpha^2 \cos i + 2\beta^2 - \alpha^2\right\}.$$

Da δW nicht negativ werden darf, wie man auch die unendlich

kleinen Variationen δn und δe wähle, so muss der Ausdruck $z + \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ unveränderlich sein; denn wäre er es nicht, so könnte man jedenfalls, ohne die Grenzcurve P zu ändern, also $\delta e = 0$ setzend, die Variationen δn so wählen, dass δW einen negativen Werth erhielte. Ist aber $z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = C$, so wird, weil $\int dU \,.\, \delta n = 0$, $\delta W = -\int dP \,.\, \delta e \,.\, \cos k \left\{\alpha^2 \cos i + 2\beta^2 - \alpha^2\right\}$, und da $\delta e \,.\, \cos k$ immer noch ganz willkürlich bleibt, so muss, wenn δW nicht negativ soll werden können, $\alpha^2 \cos i + 2\beta^2 - \alpha^2 = 0$ oder $\sin \frac{1}{2} i = \frac{\beta}{\alpha}$ sein. Lässt man die z in der horizontalen Normal-Fläche anfangen (d. h. in der Ebene, welche die Oberfläche der Flüssigkeit bilden würde, wenn keine Capillar-Anziehung Statt fände), so wird die obige Constante $C = 0$, und man erhält für die Oberfläche folgende Gleichungen:

$$z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = 0 \text{ und } \sin \tfrac{1}{2} i = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Die Constanten α und β hängen von den Functionen f und F ab, und können als ein Maass der Intensität der Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit unter sich und gegen die Theile des Gefässes betrachtet werden. Wenn $\beta > \alpha$, also die Anziehung des Gefässes gegen die Flüssigkeit grösser ist als die Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit, so kann die Gleichung $\alpha \sin \frac{1}{2} i = \beta$ nicht bestehen. In diesem Falle giebt es keine bestimmte Gestalt des Gleichgewichtes; denn denkt man sich neben der Flüssigkeit noch eine sehr dünne Schicht über einen Theil der Wand, dessen Fläche T' sei, ausgebreitet, so ist T' die Zunahme der bedeckten Oberfläche T und zugleich erleidet auch die freie Oberfläche U nahe dieselbe Zunahme T'. Der Ausdruck $W = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2) T + \alpha^2 U$ verwandelt sich dann in folgenden, der desto genauer ist, je dünner die hinzugefügte Schicht, nämlich $W' = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2) (T + T') + \alpha^2 (U + T')$, und da das Integral $\int z ds$ in beiden nahe denselben Werth vorstellt, so wird $W' - W = 2(\alpha^2 - \beta^2) T'$, also da $\beta^2 > \alpha^2$, $W' < W$, also wird durch die Annahme einer weiteren Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Wand des Gefässes, W vermindert. Ist aber die ganze Wand des Gefässes mit einer unmerklich dünnen Schicht der Flüssigkeit benetzt, so kann man in den Gleichungen für die Oberfläche $\beta = \alpha$ setzen, indem alsdann die benetzende Schicht als Ober-

fläche der Wand sich ansehen lässt. Alsdann wird $\sin \frac{1}{2} i = 1$, oder $i = \pi$; also berührt die freie Oberfläche der Flüssigkeit die Wand des Gefässes.

Die gefundenen Resultate setzen völlig freie Beweglichkeit der flüssigen Theilchen voraus. Diese findet im Innern der Flüssigkeit und an ihrer freien Oberfläche viel mehr statt, als an der Wand des Gefässes, wenn diese troken ist. Die freie Oberfläche wird daher unter allen Umständen eine der Gleichung $z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = C$ entsprechende Gestalt haben, wenn die Flüssigkeit in Ruhe ist; aber die andere Bedingung für die Grenze braucht noch nicht erfüllt zu sein, weil, wenn die erste Bedingung erfüllt ist, der Uebergang znm Minimum von W nicht ohne Verschiebung der an der Wand befindlichen Theilchen geschehen kann, welcher die Reibung Widerstand leistet. Man bemerkt daher bei benetzten Wänden grössere Uebereinstimmung der Erscheinungen mit obigen Formeln, als bei trocknen, weil an jenen die Theile der flüssigen Masse leichter fortgleiten, als an diesen.

Aus Beobachtungen an benetzten Gefässen lässt sich der Werth von α herleiten. Nach den Versuchen von Laplace ergiebt sich für Wasser bei der Temperatur von 8°,5 Cent. $\alpha = 2{,}7509$ Millim., für Weingeist vom specifischen Gewichte 0,81961, $\alpha = 1{,}7447$ Mm., für Terpentinöl bei 8° C. $\alpha = 1{,}818$; für Quecksilber bei 10° C. $\alpha = 1{,}803$. Die Temperatur scheint auf die Werthe von α nur in so weit Einfluss zu haben, als sie die Dichte der Flüssigkeit ändert, welcher der Werth von α^2 proportional ist.

Wir besitzen noch eine Bearbeitung dieses Gegenstandes in der Nouvelle théorie de l'action capillaire par S. D. Poisson, Paris 1831, welche sich besonders durch genaues Eingehen in viele einzelne Erscheinungen auszeichnet, einen zusammenfassenden Auszug aber nicht leicht gestattet; daher ich nur über einen in dieser Schrift besonders hervorgehobenen Punct eine Bemerkung machen will, zu welcher die Pflicht eines Berichterstatters mich nöthigt. P. tadelt nämlich, dass man die Aenderung nicht in Rechnung gebracht habe, welcher die Dichtigkeit des flüssigen Körpers an seiner Oberfläche unterworfen sei, und behauptet, dass, wenn dieselbe vernachlässigt wird, die freie Oberfläche eben und wagerecht bleiben und weder Hebung noch Senkung der Flüssigkeit eintreten werde (Vgl. z. B. S. 6 der Vorrede). Der Beweis für diese der bisherigen

Theorie widersprechende Behauptung geht zunächst von folgender Betrachtung aus (S. 18 u. f.):

Es sei AOB (Fig. 3.) die freie Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre AA′B′B, ω ein Element derselben in O, OE ein flüssiger Cylinder normal auf der Fläche, dessen Grundfläche ω; CD sei die Berührungs-Ebene der Fläche in O; O′ ein beliebiger Punct des Cylinders in der verticalen Tiefe $= \alpha$ unter O, und C′D′ eine durch O′ gehende mit CD parallele Ebene. Auf diesen Cylinder OO′ wirken in der Richtung von O nach O′ folgende Kräfte: die Anziehung des Meniscus, welche mit μ bezeichnet und gefunden wird $\mu = -\frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$, wo λ und λ' die Krümmungshalbmesser sind, die für eine concave Oberfläche als positiv angesehen werden. Die Constante H hängt von der Anziehung φr zwischen den Theilen der Flüssigkeit ab, und findet sich: $H = \frac{1}{4} \pi \varrho^2 \int_0^\infty r^4 \varphi r \, dr$, ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit, auf deren Veränderung an der Oberfläche hier keine Rücksicht genommen wird. Ferner wirkt auf den Cylinder die Anziehung der unter C′D′ befindlichen Flüssigkeit; ihre Intensität wird gefunden $K = \frac{2\pi\varrho^2}{3} \int_0^\infty r^3 \varphi r \, dr$; die Wirkung der zwischen CD und C′D′ enthaltenen, den Cylinder umgebenden Flüssigkeit, in der Richtung OO′, ist Null; es wirkt noch das Gewicht des Cylinders OO′, nach der Richtung desselben gemessen, mit der Intensität $g\varrho\alpha$, endlich noch der Luftdruck Π in O. Alle diese Kräfte sind auf die Flächeneinheit zurückgeführt. Poisson sagt, für das Gleichgewicht des Cylinders OO′ müsse die Summe dieser Kräfte Null sein, und erhält dann folgende Gleichung: $K + \mu + g\varrho\alpha + \Pi = 0$ oder $K = -\Pi - g\varrho\alpha + \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$, (S. 19.) auf welche dann weitere Schlüsse gegründet werden.

Die Annahme einer unveränderlichen Dichtigkeit, mit welcher die frühere Theorie sich begnügt hatte, würde durch vorstehende Gleichung unmittelbar widerlegt sein, wenn diese wirklich aus jener folgte. Denn da sich α auf einen beliebigen Punct O′ des Cylinders OE bezieht, indem es den verticalen Höhen-Unterschied zwischen O und O′ bedeutet, so ist es eine willkürliche oder veränderliche Grösse; hingegen sind alle übrigen in der Gleichung vorkommende Grössen entweder absolut constant, wie K, H, Π, g, ϱ,

oder wenigstens für denselben Cylinder OE constant, wie λ und λ'; folglich würde sich aus dieser Gleichung ein constanter Werth für α ergeben, welcher offenbar unzulässig ist. Auch betrachtet Poisson den Werth von α in dieser Gleichung als willkürlich, indem er aus ihr den Schluss zieht, dass K eine im Allgemeinen negative Grösse sei, welche hauptsächlich vom Drucke Π und von der Tiefe des Punctes O′ abhänge, dem sie entspricht. Also wäre dann K veränderlich, da doch sein Werth constant und schon vorher angegeben ist. Ganz dieselbe Einwendung lässt sich auch gegen eine im weiteren Verlaufe S. 20. Z. 8. v. u. aufgestellte Gleichung machen. Der innere Widerspruch, welchen hiernach diese Gleichungen darbieten, scheint lediglich in einer mangelhaften statischen Betrachtung seinen Grund zu haben, denn für das Gleichgewicht des Cylinders ist nicht erforderlich, dass die Summe der oben aufgezählten von O nach O′ gerichteten Kräfte, nämlich $K + \mu + g\varrho\alpha + \Pi$ gleich Null sei, sondern nur, dass sie dem Gegendruck gleich sei, welcher in O′ auf die flüssige Säule wirkt. Dieses noch deutlicher zu machen, denke man sich die Capillar-Anziehung ganz weg, also die Oberfläche eben und $K = 0$, $H = 0$, $\mu = 0$, so würde nach obiger Schlussweise für das Gleichgewicht einer flüssigen Säule von der Höhe α die Bedingung $\Pi + g\varrho\alpha = 0$ nöthig sein, die auf keine Weise erfüllt werden kann. Aber $\Pi + g\varrho\alpha$ ist offenbar nur der Druck in der Tiefe α, dem ein gleicher Gegendruck entspricht, welcher die flüssige Säule trägt. Die obige Gleichung ist also unrichtig und die daraus hergeleiteten Folgerungen erscheinen wenigstens zweifelhaft. Genauer auf dieselben einzugehen, würde allzu weitläufig und um so weniger nöthig sein, als Poisson später zu denselben Gleichungen für die Oberfläche gelangt, wie die frühere Theorie; dass die darin vorkommenden Constanten eine andere Bedeutung haben, hat keinen Einfluss, da ihre Werthe nur aus Beobachtung entnommen werden können.

---

6. Ueber das Gleichgewicht eines an einem Faden hängenden und in gleichförmige Drehung versetzten Körpers.

Eine Beobachtung Gregory's, von welcher im 3. Bande der Correspondance mathématique et physique de Bruxelles die Rede

ist, hat Pagani zuerst im 4. Bande dieser Zeitschrift und nachher in grösserer Allgemeinheit im 19. Bande des Journals f. Math. von Crelle (S. 185) behandelt. Sie betrifft das Gleichgewicht von Körpern, die an einem Faden hängen, welcher an die verticale Axe eines sich gleichförmig drehenden Rades befestigt ist. Indem der Faden sich um seine anfänglich verticale Mittellinie zu drehen genöthigt wird, muss auch der daran gebundene Körper anfangen, sich um die den Aufhängepunct mit dem Schwerpunct verbindende Gerade zu drehen. Fiele diese gerade Linie mit einer der durch den Schwerpunct gehenden Hauptaxen zusammen, so wären die Schwungkräfte um diese Axe im Gleichgewichte und mithin bliebe sie vertical. Wenn aber diese gerade Linie, welche wir hier die Axe des Körpers nennen wollen, keine der durch den Schwerpunct gehenden Hauptaxen ist, oder wenn in den Fällen, in welchen diese Axe eine Hauptaxe ist, wie z. B. bei einer hängenden gleichartigen Kugel, der Schwerpunct im Anfange der Bewegung durch eine äussere Kraft ein wenig von der Verticalen abgelenkt wird, so heben sich die Schwungkräfte nicht mehr auf, und der Körper nimmt, wenn der Beharrungstand eingetreten ist, eine Stellung an, in welcher sein Gewicht mit der Wirkung der Schwungkräfte und der Spannung des Fadens im Gleichgewicht ist. Es sei Ox (Fig. 4.) die Drehungsaxe, OA der Faden, AB die Axe, G der Schwerpunct, A der Aufhängepunct des Körpers, so dreht sich im Beharrungstande, wenn der Körper zu beiden Seiten der Ebene OAB symmetrisch vorausgesetzt wird, die Ebene OAB um die Axe Ox, welche von der Axe des Körpers AB in einem unveränderlichen Puncte C geschnitten wird. Man nehme O zum Anfange der Coordinaten, Ox zur Axe der x, die y senkrecht darauf in der Ebene AOB, und senkrecht auf dieser die z. Es sei ϑ die gegebene Winkelgeschwindigkeit, a die Entfernung AG, $GC = \varepsilon$, $\angle ACO = \alpha$, m die Masse des Körpers, $gm = P$ sein Gewicht, so sind o, $\vartheta^2 y\,dm$, $\vartheta^2 z\,dm$ die Componenten der Schwungkraft im Puncte x, y, z, nach diesen Axen, und mithin sind $X = 0$, $Y = \vartheta^2 \int y\,dm = \varepsilon \sin\alpha\, \vartheta^2 . m$, $Z = \vartheta^2 \int z\,dm = 0$ die Componenten der Mittelkraft aus allen Schwungkräften. Nennt man noch ω den Querschnitt, $\tau\omega$ die Spannung des Fadens in einem beliebigen Puncte, T den Werth von τ in A, β die Neigung von T gegen die Axe x, so hat man

$$P = T\omega \cos\beta, \quad P\varepsilon \sin\alpha . \vartheta^2 = gT\omega \sin\beta. \qquad 1.$$

Bildet man ferner nach dem Schema $\Sigma\,(Xy - Yx) = 0$ die Relation für das Gleichgewicht der Momente, so ergiebt sich $-\vartheta^2 \int xy\,dm$ als Moment der Schwungkräfte und man erhält folgende Gleichung, in welcher $OC = h$ gesetzt ist:

$$P\varepsilon \sin\alpha + \vartheta^2 \int (h - x)\,y\,dm = (\alpha + \varepsilon)\, T\omega \sin(\alpha + \beta).$$

Die Momente in den Ebenen yz, xz siud Null, da namentlich wegen der vorausgesetzten Symmetrie das Moment der Schwungkraft in der Ebene xz, nämlich $\vartheta^2 \int xz\,dm$, verschwindet. Um das Integral in vorstehender Gleichung zu entwickeln, nehme man in dem Körper ein zweites System rechtwinklicher Coordinaten an, deren Anfang der Schwerpunct G sei; GA sei die Axe der u, senkrecht auf dieser in der Ebene OAB die v; so ist

$$h - x = (u + \varepsilon)\cos\alpha + v\sin\alpha,\quad y = (u + \varepsilon)\sin\alpha - v\cos\alpha,$$

folglich $(h - x)\,y = [(u + \varepsilon)^2 - v^2]\sin\alpha\cos\alpha - (u + \varepsilon)\,v\cos 2\alpha.$

Da nun der Anfang der u, v im Schwerpuncte des Körpers liegt, so ist $\int u\,dm = 0$, $\int v\,dm = 0$; setzt man noch $\int u^2\,dm = A$, $\int v^2\,dm = B$, $\int uv\,dm = C$, so kommt

$$\int (h - x)\,y\,dm = (\varepsilon^2 m + A - B)\sin\alpha\cos\alpha - C\cos 2\alpha.$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, und schafft aus derselben noch mittels der Gleichungen 1. die Grössen $T\sin\beta$, $T\cos\beta$ weg, so kommt, nach gehörigem Aufheben:

$$g\,[(A - B)\sin\alpha\cos\alpha - C\cos 2\alpha]\,\vartheta^2 = (g + \varepsilon\vartheta^2\cos\alpha)\,aP\sin\alpha. \qquad 2.$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen für den biegsamen Faden, nämlich $d\left(\tau\frac{dx}{ds}\right) + g\varrho ds = 0$, $d\left(\tau\frac{dy}{ds}\right) + \varrho\vartheta^2 y\,ds = 0$, in welchen ϱ die Dichtigkeit des Fadens bedeutet. Aus diesen ergeben sich folgende Integrale, die man auch nach allgemein bekannten Sätzen unmittelbar aufstellen kann, nämlich:

$$\tau\frac{dx}{ds} + g\varrho s = T\cos\beta + g\varrho l \qquad 3.$$

wo $l = OA$ die Länge des Fadens, s einen Bogen desselben von O an ausdrückt. Ferner:

$$\tau + g\varrho x + \tfrac{1}{2}\varrho\vartheta^2 y^2 = K \qquad 4.$$

wo K eine Constante, die auch durch die Coordinaten von A folgendermassen ausgedrückt wird:

$$K = T + g\varrho\,[h - (a + \varepsilon)\cos\alpha] + \tfrac{1}{2}\varrho\vartheta^2 (a + \varepsilon)^2 \sin\alpha^2.$$

Für die Fadencurve erhält man folgende Gleichung aus 3. und 4., nämlich:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{K - g\varrho x - \frac{1}{2}\varrho\vartheta^2 y^2}{T\cos\beta + g\varrho\,(l - s)}. \qquad 5.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ergeben sich y und s in x ausgedrückt, wobei die Constanten so zu nehmen sind, dass für $x = 0$ auch y und s verschwinden. Setzt man demgemäss $y = fx$, $s = \varphi x$, so folgen noch zwei Gleichungen, indem man für x, y, s ihre auf den Punct A bezüglichen Werthe einsetzt, nämlich

$$(a + \varepsilon) \sin \alpha = f\,[h - (a + \varepsilon) \cos \alpha] \text{ und } l = \varphi\,[h - (a + \varepsilon) \cos \alpha]. \quad 6.$$

Die fünf Gleichungen unter 1. 2. und 6. enthalten eben so viele unbekannte Constanten, nämlich α, ε, h, β, T, welche durch sie völlig bestimmt werden. Ihre Werthe in $y = fx$ eingesetzt, geben dann die vollständig bestimmte Fadencurve, deren Differentialgleichung jedoch so verwickelt ist, dass sich eine endliche Gleichung aus ihr nicht allgemein darstellen lässt. Gestattet man sich die Masse des Fadens ganz zu vernachlässigen, so ist $\varrho = 0$ zu setzen und man erhält für die Gestalt desselben eine gerade Linie; nämlich $x = s \,.\, \cos \beta$, $y = s \,.\, \sin \beta$, ferner $\tau = K = T$; und

$$h - (a + \varepsilon) \cos \alpha = l \cos \beta, \; (a + \varepsilon) \sin \alpha = l \sin \beta. \quad \text{(nach 6.)}$$

Ferner folgt aus 1. durch Elimination von T, $\vartheta^2 \,.\, \varepsilon \sin \alpha = g \,.\, tg \beta$. Nimmt man noch an, dass die Axe u des Körpers eine Hauptaxe ist, so ist $C = 0$ und man erhält aus 2.

$$g\,(A - B)\,\vartheta^2 \cos \alpha = (g + \varepsilon \vartheta^2 \cos \alpha)\,Pa.$$

Diese vier Gleichungen geben unter den angezeigten Voraussetzungen, und wenn die Werthe von A und B der Gestalt des Körpers gemäss bestimmt sind, die vier Constanten α, β, ε, h.

Das Vorstehende giebt eine Uebersicht der Aufgabe, aus welcher sich die Anwendungen auf einzelne Fälle leicht entnehmen lassen; man findet deren mehrere in der genannten Abhandlung von Pagani. In dieser wird auch die Gestalt untersucht, welche eine am Faden hängende in sich geschlossene Kette annimmt, wenn sie einer gleichförmigen Drehung unterworfen ist und sich im Beharrungstande befindet. Indem sie sich öffnet, erhält ihr grösster Durchmesser etwa die Lage AB der vorigen Figur. Nimmt man C zum Anfang der Coordinaten, CA zur Axe der u, senkrecht darauf in der Ebene OAB die v, und senkrecht auf beiden w, und nennt t die Spannung im Puncte u, v, w, kds ein Element der Masse der Kette, von der Länge ds, wo k eine Constante, so ergeben sich, wenn man die bekannten Grundformeln für den biegsamen Faden auf die hier vorliegenden Kräfte anwendet, folgende Differential-Gleichungen:

$$d\left(t\frac{du}{ds}\right)+\{(u\sin\alpha+v\cos\alpha)\vartheta^2\sin\alpha-g\cos\alpha\}\,kds=0$$

$$d\left(t\frac{dv}{ds}\right)+\{(u\sin\alpha+v\cos\alpha)\vartheta^2\cos\alpha+g\sin\alpha\}\,kds=0$$

$$d\left(t\frac{dw}{ds}\right)+w\vartheta^2kds=0.$$

Hieraus folgt, indem man diese Gleichungen nach der Reihe mit du, dv, dw multiplicirt, die Producte addirt und sofort integrirt:

$$t+\tfrac{1}{2}\vartheta^2k(u\sin\alpha+v\cos\alpha)^2+g(v\sin\alpha-u\cos\alpha)k+\tfrac{1}{2}\vartheta^2kw^2=\text{Const.}$$

Bezeichnet man die obigen Gleichungen durch

$$d\left(t\frac{du}{ds}\right)+Ukds=0,\ d\left(t\frac{dv}{ds}\right)+Vkds=0,\ d\left(t\frac{dw}{ds}\right)+Wkds=0$$

wo die Bedeutung der Abkürzungen aus der Vergleichung mit den obigen hervorgeht, wonach z. B. $W=\vartheta^2 w$, u. s. w., so ergeben sich, wenn man die erste mit $\frac{dv}{ds}$, die zweite mit $\frac{du}{ds}$ multiplicirt und das zweite Product vom ersten subtrahirt:

$$t\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 d\left(\frac{du}{dv}\right)+k(Udv-Vdu)=0,\ \text{und auf ähnliche Weise:}$$

$$t\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dv}{dw}\right)+k(Vdw-Wdv)=0$$

$$t\left(\frac{du}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dw}{du}\right)+k(Wdu-Udw)=0.$$

Benutzt man den obigen Werth von t, so reichen zwei von diesen Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Curve hin, und jede dritte ist alsdann Folge der beiden andern.

Nimmt man die Winkelgeschwindigkeit ϑ sehr gross, und vernachlässigt alsdann die Wirkung der Schwere gänzlich, so wird die Kette sehr nahe horizontal liegen, also $\cos\alpha=0$, $v=0$ gesetzt werden können. Die Gleichungen für u und w sind dann:

$$d\left(t\frac{du}{ds}\right)+u\vartheta^2kds=0,\quad d\left(t\frac{dw}{ds}\right)+w\vartheta^2kds=0.$$

Für t hat man $t=C-\frac{1}{2}\vartheta^2k(u^2+w^2)$, oder wenn $C=\frac{1}{2}\vartheta^2k.b^2$ gesetzt wird, $t=\frac{1}{2}\vartheta^2k(b^2-u^2-w^2)$. Nimmt man nun $u^2+w^2=a^2$, also constant an, so wird $t=\frac{1}{2}\vartheta^2k(b^2-a^2)$, also die Spannung constant, und setzt man $u=a\cos\varphi$, $w=a\sin\varphi$, so wird $ds^2=du^2+dw^2=a^2d\varphi^2$, $ds=ad\varphi$, $du=-\sin\varphi.ds$, $dw=\cos\varphi.ds$; daher geben die beiden obigen Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}(b^2-a^2)\,d(-\sin\varphi)+a^2\cos\varphi d\varphi=0,$$

$$\tfrac{1}{2}(b^2-a^2)\,d\cos\varphi+a^2\sin\varphi d\varphi=0,$$

woraus übereinstimmend folgt: $b^2 = 3a^2$; folglich genügt die Annahme $u^2 + w^2 = a^2$ den Bedingungen des Gleichgewichts, und die Spannung der kreisförmigen Kette findet sich $t = \vartheta^2 k a^2$. Ist l die Länge der Kette, so hat man $l = 2a\pi$; daher $a = \frac{l}{2\pi}$, also die Spannung $t = \frac{\vartheta^2 k l^2}{4\pi^2}$. Nennt man p das Gewicht von der Längeneinheit der Kette, so wird k, d. i. die in der Längeneinheit enthaltene Masse, gleich $\frac{p}{g}$; also die Spannung $t = \frac{\vartheta^2 l^2 p}{4\pi^2 g}$. Ist n die Anzahl der Umdrehungen der Kette in der Zeiteinheit, also $n = \frac{\vartheta}{2\pi}$, $pl = P$ das Gewicht der Kette, so folgt $t = \frac{n^2 P l}{g}$.

---

7. Ueber die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte in der Maschinenlehre.

Nach dem allgemeinen Satz der lebendigen Kräfte ist bekanntlich für irgend ein System von Massen $m, m', m'', \ldots$, welche sich zur Zeit t mit den Geschwindigkeiten $v, v', \ldots$ bewegen, unter der Wirkung der Kräfte $P, P', \ldots$, welche mit den Richtungen dieser Geschwindigkeiten die Winkel $\vartheta, \vartheta', \ldots$ einschliessen,

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\,\Sigma m v_0^2 = \Sigma \int P \cos\vartheta\, ds$$

wo ds die Fortrückung des Angriffspunctes von P, während der Zeit dt, mithin $P\cos\vartheta ds$ das Product aus der nach der Richtung von ds wirkenden Componente von P in die Fortrückung ds bedeutet, und die Integration die in der Zeit von t_0 bis t Statt findenden Werthe umfasst. In so fern nur von einer beliebig vorgestellten Fortrückung die Rede ist, heisst dieses Product in der Statik das virtuelle Moment der Kraft P; seinem Integral hat Gauss, wenigstens in einem besonderen Falle, den Namen Potential beigelegt; in dem Satze der lebendigen Kräfte aber bezieht sich dieses Product auf die wirkliche Bewegung der Puncte des Systemes, und ist in besonderer Rücksicht auf die Maschinenlehre von französischen Mathematikern, namentlich Poncelet und Coriolis, das Element der Arbeit, sein Integral die Arbeit der Kraft P genannt worden. Jedenfalls ist dieses Product aus Kraft in Fortrückung nach der Richtung der Kraft ein durch die ganze theoretische und practische Mechanik durchgehender Grundbegriff, der an sich zwar nicht neu genannt werden kann, an dessen klare Auffassung und

Hervorhebung sich aber ein grosser Theil der bedeutendsten neueren Leistungen in dieser Wissenschaft knüpft. Die Benennung Arbeit bietet sich übrigens in der Maschinenlehre so natürlich dar, dass sie schon früher von Navier und Prony zufällig, und ohne die Absicht sie als eine technische geltend zu machen, gebraucht worden ist; auch rechtfertigt sie sich, wie Coriolis bemerkt, dadurch, dass zu jeder mechanischen Arbeit nicht allein eine Kraft, sondern auch eine Bewegung des Angriffspunctes erforderlich ist, ohne welche nichts zu Stande kommen kann. Ein blosser Druck gegen einen unverrückbaren Gegenstand ist keine Arbeit. — In so fern die Kraft mit der Richtung der Bewegung des Angriffspunctes einen spitzen Winkel bildet, also wenn $P \cos \vartheta ds$ positiv ist, heisst die Arbeit bewegende, wenn aber ϑ stumpf ist, widerstehende Arbeit (travail moteur und travail résistant). Bezeichnet man mit P die bewegenden, mit Q die widerstehenden Kräfte, so kann man die Gleichung der lebendigen Kräfte auch so schreiben:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \Sigma \int P \cos \vartheta ds - \Sigma \int Q \cos \vartheta ds$$

wo ϑ überall spitz gedacht wird; nach dieser Formel ist die Zunahme der lebendigen Kraft des Systems, in der Zeit von t_0 bis t, (wenn unter lebendiger Kraft die Hälfte der Summe der Producte aus jeder Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit verstanden wird,) gleich dem Ueberschuss der bewegenden Arbeit über die widerstehende, während jener Zeit. Dieser Satz, mit den daran sich knüpfenden allgemeinsten Folgerungen, bildet das Principe de la transmission du travail, welches unter diesem Namen zuerst von Poncelet und Coriolis aufgestellt ist und gegenwärtig in der Maschinenlehre allgemein zu Grunde gelegt wird. Die Beschränkungen, unter welche der Satz der lebendigen Kräfte in seiner gewöhnlichen Darstellung gestellt wird, finden bei dieser Auffassung nicht Statt, indem einerseits das Vorkommen der Zeit in den Bedingungsgleichungen des Systemes eine voraus bestimmte Bewegung eines Theils desselben voraussetzt, welche bei jeder wirklichen Anwendung nur durch die vorhandenen Kräfte bedingt sein kann und mithin wegfällt, wenn man diese vollständig berücksichtigt; so wie andererseits die Bedingung der Integrabilität des Ausdruckes auf der rechten Seite der Gleichung, so wichtig sie auch für den Fortgang der Rechnung ist, doch keinen wesentlichen Unterschied in der Natur der Probleme begründet und das Princip der Uebertragung der Arbeit nicht aufhebt. Die nächste Folgerung,

welche hier aus diesem Princip zu ziehen ist, betrifft die Bewegung einer Maschine in ihrem Beharrungstande. Ist nämlich der Gang einer Maschine gleichförmig, also ihre lebendige Kraft unveränderlich geworden, so ist nach dem obigen Princip die bewegende Arbeit in jeder beliebigen Zeit der widerstehenden Arbeit während dieser Zeit gleich. Ist der Gang der Maschine nur periodisch gleichförmig, so erlangt die lebendige Kraft nach Ablauf jeder Periode immer wieder denselben Werth, und jene Gleichheit gilt dann zwar nicht für jeden Zeitpunct, aber doch für jede beliebige Anzahl von Perioden der Bewegung. Derjenige Theil der bewegenden Arbeit, welcher zur Erreichung des bei der Maschine beabsichtigten Zweckes verwandt wird, heisst die nutzbare Arbeit oder Nutzeffect; der übrige Theil geht an den Hindernissen der Bewegung verloren.

Die Anwendung dieser Principien muss man aus den der Maschinenlehre gewidmeten Werken kennen lernen, unter welchen ich hier hauptsächlich folgende hervorhebe: Introduction à la mécanique industrielle, physique et experimentale, par J. V. Poncelet. Deuxième Edition. Metz et Paris 1841, und den zweiten Theil des schon oben genannten Resumé de leçons etc. von Navier, welcher umfassende Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten und die Theorie der Maschinen enthält. Coriolis du calcul de l'effet des machines. Paris 1829. Poisson giebt am Schlusse des zweiten Bandes der neuen Ausgabe seiner Mechanik eine Addition relative à l'usage du principe des forces vives dans le calcul des machines en mouvement.

Zur Messung der Arbeit von Maschinen hat man verschiedene Vorrichtungen, unter welchen der Pronysche Zaum am häufigsten gebraucht wird. Ist nämlich A (Fig. 5.) der Querschnitt einer Welle, welche wir uns horizontal vorstellen wollen, so löst man die von der Welle getriebenen Theile der Maschine aus ihrer Verbindung mit jener, und umgiebt dafür die Welle mit einem eisernen Bande oder Zaume DEF, an dessen Enden D und F ein Balken oder Hebel C′C angeschraubt und dadurch sammt dem Bande DEF mehr oder weniger gegen die Welle gepresst wird. An einem Puncte C des Hebels wird nun ein Gewicht P von solcher Grösse angebracht, und zugleich durch Stellung der Schrauben in D und F der Druck des Zaumes auf die Welle so eingerichtet, dass während die Welle A sich mit der Geschwindigkeit dreht,

für welche man die Beobachtung anstellen will, der Hebel C′C fortwährend horizontal stehen bleibt. Die Kraft, welche der Drehung der Welle entgegenwirkt, ist alsdann offenbar die Reibung derselben gegen den Zaum, welche man sich in einem Puncte des Umrings vereinigt denken kann. Bezeichnet man ihre Intensität mit R, den Halbmesser der Welle mit a, den von einem Puncte im Umringe der Welle in einer gegebenen Zeit durchlaufenen Weg mit $a\varphi$, so ist $Qa\varphi$ die widerstehende Arbeit der Reibung, insofern Q constant gedacht wird. Offenbar strebt aber auch die Reibung Q, den Zaum mit dem Hebel um den Mittelpunct der Welle zu drehen; ihr Moment ist Qa; bezeichnet man den Abstand des Gewichtes P vom Mittelpunct der Welle, in horizontaler Richtung, also BC, mit b, so ist Pb das jene Drehung verhindernde Moment, mithin $Qa = Pb$, also ist die widerstehende Arbeit $= Pb\varphi$. Dieselbe wird mithin durch Beobachtung des den Hebel festhaltenden Gewichtes P und der Anzahl der Umdrehungen der Welle, in einer bestimmten Zeit, gefunden. In so fern aber die Welle sich gleichförmig dreht, oder wenigstens am Anfange und Ende der Beobachtung einerlei Geschwindigkeit hat, ist ihre bewegende Arbeit der widerstehenden gleich, und wird mithin durch $Pb\varphi$ ausgedrückt.

Um diese Vorrichtung anzuwenden, muss die Wirksamkeit der Maschine unterbrochen werden. Genauere, aber auch nicht so einfache Vorrichtungen sind die verschiedenen Arten des Feder-Dynamometers von Morin, welche sich alle darauf gründen, dass die bewegende Kraft mittels einer an der Welle der Maschine oder bei Wagen am Angriffspuncte des Zuges angebrachten elastischen Feder wirkt, durch deren Biegung sich die Intensität jener zu erkennen giebt. Dieses würde an sich während des Ganges der Maschine ohne Nutzen sein; allein durch einen passend angebrachten Stift zeichnet die Stahlfeder ihre jedesmalige Biegung auf ein Papier, welches sich unter dem Stifte mit einer der Geschwindigkeit der Maschine in jedem Augenblicke proportionalen Geschwindigkeit fortbewegt; aus dieser Zeichung kann man dann die während der Zeit der Beobachtung gelieferte Arbeit entnehmen. Diese und noch andere Vorrichtungen zu demselben Zweck sind von Poncelet angegeben worden. Die Beschreibung einer Vorrichtung dieser Art findet man in den Expériences sur le frottement etc. par A. Morin, und in einer Abhandlung über die Reibung, von A. Brix, welche eine kritische Darstellung der bisher über die Rei-

bung angestellten Versuche, namentlich auch der von Morin enthält und in den Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss in Preussen vom Jahre 1837 gedruckt ist. Hauptsächlich aber ist wegen Beschreibung dieser Dynamometer auf eine Schrift unter folgendem Titel zu verweisen: Description des appareils chronométriques à style, propres à la répresentation graphique et à la détermination des lois du mouvement, es des appareils dynamométriques propres à mesurer l'effort ou le travail dévéloppé par les moteur animés ou inanimés et par les organes de la transmission du mouvement dans les machines, par Arthur Morin, Capitaine d'Artillerie, etc. Metz, S. Lamort. 1838. 51 Seiten. 8.

Um einige Anschauung von der Sache zu geben, will ich die zur Messung der Zugkräfte an Wagen bestimmte Vorrichtung andeutend beschreiben. Dieselbe besteht aus zwei an den Enden zusammengeboltzten Stahlblättern, ACB, ADB, (Fig. 6.) von denen das vordere in der Mitte D vom Zugseile ergriffen wird, während das hintere in seiner Mitte C an den Wagen befestigt ist. Durch die Zugkraft werden die Stahlblätter so gebogen, dass die Zunahme der anfänglichen Entfernung CD in jedem Augenblicke dieser Kraft proportional ist und mithin das Maass derselben abgiebt. In D befindet sich ein verticaler Stift, an dem ein Pinsel angebracht ist, welcher auf ein unter ADBC angebrachtes Papier den Endpunct des Abstandes CD mit Tusche aufträgt. Dieses Papier geht über zwei an den Seiten A und B angebrachte Rollen, indem es sich von der einen auf die andere abwickelt. Die Rollen werden entweder durch ein Uhrwerk in gleichförmige Drehung versetzt, oder sie stehen mit den Wagenrädern in Verbindung, wodurch eine der Geschwindigkeit des Wagens proportionale Geschwindigkeit des Papiers erlangt wird. Durch Quadratur der gezeichneten Curve erhält man in dem ersten Falle, wo die auf den Ordinaten P senkrechten Abscissen den Zeiten proportional sind, das Integral $\int P dt$ oder die mittle Kraft, im zweiten Falle, wo die Abscissen dem durchlaufenen Wege s proportionirt sind, das Integral $\int P ds$ oder die gesammte Arbeit der Zugkraft, während der Beobachtung.

Eine weitere von Poncelet angegebene Vorrichtung, die zu mehr in das Grosse gehende Messungen dient, gründet sich auf folgenden Gedanken: der Stift in D und das untergelegte Papier bleiben bei dem vorigen Dynamometer weg. Anstatt ihrer ist in C eine verticale Axe CE aufgestellt, tragend eine horizontale Kreis-

Scheibe RT, welche durch ein umgeschlagenes Riemenseil mit dem Wagenrade verbunden ist und dadurch eine der des letzteren proportionale Drehungsgeschwindigkeit erhält. (Fig. 7. wo C und D dieselben Puncte des Dynamometers wie in Fig. 6. bedeuten; die Stahlfedern ACB, ADB sind also senkrecht auf der Ebene der Tafel vorzustellen.) Der Axe CE gegenüber ist in D eine ebenfalls verticale Axe DF aufgestellt, welche sich in einiger Höhe über der Fläche des Rades RT, rechtwinklich gebogen, in eine horizontale Axe FG fortsetzt; an dieser ist ein verticales Rad LH drehbar befestigt, dessen tiefster Punct H die Fläche von RT berührt. Sobald die Zugkraft P Null ist, liegt der Punct H gerade im Mittelpuncte E von RT; wenn aber der Punct D durch die Zugkraft von C mehr entfernt wird, rückt auch das Rad LH um eben so viel vor, und wird durch die Drehung des Rades RT mittels der Reibung in solche Drehung gesetzt, dass seine Umfangsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit des jedesmal von ihm berührten Punctes H der Scheibe RT gleich ist, also gleich rw, wenn EH = r und w die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe RT. Da r offenbar der Verlängerung des anfänglichen Werthes von CD gleich, also der Zugkraft P proportional ist, so ist schliesslich die Winkelgeschwindigkeit des Rades LH in jedem Augenblicke dem Product aus der Zugkraft P in die Geschwindigkeit v des Wagens proportional. Wenn nun das Rad LH in einer gewissen Zeit n Umdrehungen gemacht hat, so ist der von einem Puncte seines Umringes durchlaufene Weg dem Integral $\int Pvdt = \int Pds$ proportional, und dieses wird mithin aus jenem bekannt. Durch ein an LH angebrachtes Räderwerk mit Zeiger erfährt man die Anzahl der geschehenen Umdrehungen des Rades LH.

---

8. Theorie der Dampfmaschinen nach v. Pambour.

Die ältere Theorie rotirender Dampfmaschinen, welche man z. B. aus Taffé Application des principes de mécanique aux machines les plus en usage, Paris 1837, kennen lernen kann, beruhte in der Hauptsache auf folgender Betrachtung:

Bezeichnet P die Spannung des Dampfes im Kessel, a den Querschnitt des Cylinders einer Dampfmaschine, l den Kolbenlauf, n die Anzahl der in der Secunde vollführten Kolbenhübe, so ist

nl der Weg, welchen der Kolben unter dem Drucke aP in der Secunde durchläuft, mithin $aPnl$ die bewegende Arbeit des Dampfes auf den Kolben, in der Secunde. Bezeichnet noch p den Gegendruck der Luft auf den Kolben, wenn keine Condensation angewandt ist, oder, wenn solche Statt findet, den aus ihrer Unvollständigkeit entstehenden Widerstand, so liefert dieser die widerstehende Arbeit $apnl$, und mithin bleibt $a(P-p)nl$ als theoretischer Effect übrig. Wegen der Reibung ist der practische Effect nur etwa die Hälfte des vorigen, oder ein anderer Bruchtheil, welchen man aus Beobachtung zu bestimmen suchte.

Bei dieser Berechnung wird die Spannung im Kessel als gegeben vorausgesetzt, und der Druck des Dampfes auf den Kolben im Cylinder ihr sofort gleich angenommen. Inzwischen hatte schon Watt durch Beobachtungen mit seinem Indicator bei rotirenden Dampfmaschinen häufig eine Verminderung des Druckes im Cylinder gegen den im Kessel bemerkt; bezeichnet man diesen kleineren Druck im Cylinder mit P', so ist offenbar $a(P'-p)nl$ der wahre theoretische Effect, für welchen die ältere Theorie nur darum $a(P-p)nl$ setzt, weil sie den Werth von P' nicht auf wissenschaftlichem Wege bestimmt hatte. Pambour, dessen Arbeiten zuerst über diesen Gegenstand Licht verbreitet haben, beweist, dass der Druck auf den Kolben nicht durch die Spannung bedingt wird, unter welcher die Dämpfe sich im Kessel entwickeln, sondern lediglich durch den aus der Belastung der Maschine und den Hindernissen der Bewegung entspringenden Widerstand. Indem im Kessel, bei gleichbleibender Wirkung des Feuers, in jeder Secunde immer dieselbe Wassermenge in Dampf verwandelt wird, muss offenbar, so lange die Sicherheits-Ventile geschlossen bleiben und kein Dampf verloren geht, eine der erzeugten gleiche Dampfmenge in jeder Secunde durch das Leitrohr nach dem Cylinder geführt und verbraucht werden. Hieraus folgt, dass die Spannung, welche die Dämpfe im Kessel annehmen, häuptsächlich von der Weite des Leitrohres oder von der Oeffnung des Regulators bedingt wird. Wird nämlich durch den Regulator der Querschnitt des Leitrohrs verengt, so muss dennoch, wenn nach augenblicklicher Unterbrechung der neue Beharrungstand eintritt, immer dasselbe Gewicht von Dampf in der Secunde durch den verengten Querschnitt gepresst werden; die Dämpfe im Kessel müssen daher sich höher spannen und mithin auch verdichten. Geht jedoch diese Zunahme

der Spannung so weit, dass die Sicherheits-Ventile sich öffnen, so entweicht durch diese ein Theil des Dampfes, und die Menge des in den Cylinder gelangenden Dampfes ist alsdann kleiner als die des erzeugten. In der früheren Theorie hat man dem Regulator einen wesentlichen Einfluss auf die Spannung im Cylinder zugeschrieben, ohne jedoch denselben bei Aufstellung der Formeln in Rechnung zu bringen. Allein der in den Cylinder gelangende Dampf nimmt nothwendig, wenn die Maschine in gleichförmigem Gange ist, wie hier immer vorausgesetzt wird, eine Spannung an, die niemals grösser als diejenige im Kessel, sonst aber von dieser und vom Regulator ganz unabhängig ist, und nur durch den auf den Kolben wirkenden Widerstand bedingt wird, welchem sie Gleichgewicht halten muss. Der Dampf erlangt daher im Cylinder ein desto grösseres Volumen, je kleiner der Widerstand ist. Von dem Volumen, welches der in jeder Secunde aus dem Kessel in den Cylinder strömende Dampf in diesem annimmt, hängt die Geschwindigkeit des Kolbens ab; denn der Inhalt des Cylinders multiplicirt durch die Anzahl der in jeder Secunde vollführten Kolbenhübe muss jenem Dampfvolumen gleich sein. Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich sofort die Relation zwischen der Geschwindigkeit der Maschine und ihrer Belastung, welche in den vor der Pambourschen Theorie erschienenen Schriften nicht gefunden wird. Diese ist in folgenden Schriften enthalten: A practical treatise on locomotive engines upon railways, by the Chev. de Pambour, London 1836. Deutsch von Crelle im Journal für Baukunst, Band 10. Théorie de la machine à vapeur, par le Chev. de Pambour, Paris 1839.

Um die Theorie in ihrer Allgemeinheit zu entwickeln, muss auf die Wirkung der Absperrung des Dampfes im Cylinder Rücksicht genommen werden. Man pflegt Maschinen, worin diese benutzt ist, Expansions-Maschinen zu nennen, welche Benennung jedoch nicht passend ist, da sie die Expansion bei anderen Maschinen ausschliesst und die Annahme gleicher Spannung im Kessel und im Cylinder begünstigt, aus welcher sie wahrscheinlich hervorgegangen ist. Mit Beibehaltung der schon oben eingeführten Buchstaben sei P' die Spannung im Cylinder vor der Absperrung, also bei ununterbrochenem Dampfzufluss; diese betrachtet P. als constant, oder begnügt sich vielmehr, ihren mittlen Werth in Rechnung zu bringen; es sei l' der vor der Absperrung durchlaufene Theil des Kol-

benlaufes; π die Spannung nach erfolgter Absperrung, indem der Kolben den Weg λ (welcher mithin grösser als l′) im Cylinder durchlaufen hat; so ist $P'al' + \int_{l'}^{l} \pi a d\lambda$ die bewegende Arbeit des Dampfes während eines Kolbenlaufes. Nennt man noch R den Widerstand auf den Kolben für die Flächeneinheit, so ist Ral die widerstehende Arbeit, welche der bewegenden nach Ablauf jedes Kolbenhubes gleich sein muss, wenn die Bewegung im Beharrungstande ist; folglich erhält man

$$P'l' + \int_{l'}^{l} \pi d\lambda = Rl. \qquad 1.$$

Um die angezeigte Integration zu vollziehen, muss π durch λ ausgedrückt werden. Nimmt man an, dass der Dampf, indem er sich ausdehnt, seine Temperatur behält, und mithin die Spannung der Ausdehnung umgekehrt proportional bleibt, so muss er von aussen die nöthige Wärme aufnehmen, wozu sein rascher Gang durch den Cylinder nicht Zeit genug gewähren dürfte. Pambour, welcher sich in seiner ersten Schrift mit dieser Annahme begnügt hatte, entscheidet sich in der Théorie de la machine à vapeur dagegen, indem er aufstellt, dass der Dampf bei seinen Ausdehnungen in der Maschine sich jederzeit mit Rücksicht auf seine Temperatur im Zustande der grössten Dichtigkeit befinde. Hiernach nimmt derselbe keine Wärme von aussen an, sondern die Summe seiner freien und gebundenen Wärme bleibt immer dieselbe. Dies wurde durch zahlreiche Versuche bestätigt, in welchen die Spannung und Temperatur im Kessel mit der Spannung und Temperatur des in die Luft ausströmenden Dampfes verglichen wurde. Blieb die Temperatur des Dampfes auf dem Wege durch die Maschine unverändert, so musste die Temperatur des ausströmenden Dampfes der Temperatur im Kessel gleich kommen; dies war aber nicht der Fall, sondern die Temperatur beim Ausströmen entsprach jedesmal der dabei vorhandenen Spannung, nach dem für den Zustand grösster Dichtigkeit geltenden Gesetze. Da dieses Gesetz nicht einfach ist, so bedient sich Pambour einer angenäherten Formel, nämlich

$$\frac{1}{\mu} = n + qp \qquad 2.$$

in welcher $\frac{1}{\mu}$ die Dichte des Dampfes, die des Wassers = 1 gesetzt, also μ das relative Volumen des Dampfes gegen Wasser,

und p die Spannung vorstellt; n und q sind constante Coefficienten. Pambour setzt:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{0{,}4227 + 0{,}00258 \cdot p}{10000} \text{ für niederen Druck bis zu 2 Atm.}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1{,}421 + 0{,}0023 \cdot p}{10000} \text{ für höheren Druck bis zu 8 Atm.}$$

p ist der Druck in Pfunden auf den Quadratfuss, nach englischem Maasse und Gewicht.

Um diese Formeln anzuwenden, ist noch zu bemerken, dass sich an jedem Ende des Cylinders ein Raum befindet, in welchen der Kolben nicht eindringt, um nicht auf den Boden des Cylinders zu stossen, und welcher sich bei jedem Kolbenhube abwechselnd mit Dampf füllt. Es sei c die Länge dieses Raumes, so ist $a(l' + c)$ das Volumen des im Cylinder enthaltenen Dampfes, im Augenblick der Absperrung, wobei die Spannung P'; ferner $a(\lambda + c)$ das Volumen desselben Dampfes für die Spannung π, nach der Absperrung. Da beide Volumina aus derselben Wassermenge gebildet sind, so verhalten sie sich wie die relativen Volumina, d. h. wie die zu P' und π gehörigen Werthe von μ; daher nach obiger das Gesetz der fortdauernden grössten Dichtigkeit angenähert ausdrückenden Formel:

$$(l' + c)\ (n + qP') = (\lambda + c)\ (n + q\pi)$$

oder wenn zur Abkürzung $n = q\gamma$ gesetzt wird, $(l' + c)\ (\gamma + P') = (\lambda + c)\ (\gamma + \pi)$; mithin

$$\pi = \frac{(\gamma + P')\ (l' + c)}{\lambda + c} - \gamma. \qquad 3.$$

Vollzieht man hiernach die Integration nach λ in 1., und führt führt folgende Abkürzung ein:

$$\frac{l'}{l' + c} + \log \frac{l + c}{l' + c} = k \qquad 4.$$

so kommt:

$$k\ (\gamma + P')\ (l' + c) - \gamma l = Rl. \qquad 5.$$

Diese Formel bestimmt den Druck P' auf den Kolben, vor der Absperrung, wenn der Widerstand R auf die Flächeneinheit des Kolbens gegeben ist. Für Maschinen ohne Absperrung wird $l' = l$, mithin $k = \frac{l}{l + c}$, und daher $P' = R$.

Das relative Volumen des Dampfes für die Spannung P' ist $\mu = \frac{1}{n + qP'} = \frac{1}{q(\gamma + P')}$; werden mithin im Kessel in jeder Secunde σ Cubikzoll Wasser in Dampf verwandelt, so ist $\frac{\sigma}{q(\gamma + P')}$

ihr Volumen unter der Spannung P'. Dieses Volumen füllt, wenn n die Anzahl der Kolbenhübe in der Secunde ist, in dieser Zeit nmal den Raum $a(l'+c)$; folglich ist $a(l'+c)n = \frac{\sigma}{q(\gamma+P')}$. Nennt man v die (durchschnittliche) Geschwindigkeit des Kolbens, so ist $v = nl$; mithin

$$v = \frac{\sigma l}{aq(l'+c)(\gamma+P')} \qquad 6.$$

Verbindet man die Gleichungen 5. und 6. um P' wegzuschaffen, so erhält man die Relation zwischen Belastung und Geschwindigkeit, nämlich

$$aq(\gamma+R)v = k\sigma \qquad 7.$$

oder

$$aq(\gamma+R)v = \left(\frac{l'}{l'+c} + \log\frac{l+c}{l'+c}\right)\sigma.$$

Für Maschinen ohne Absperrung wird: $aq(l+c)(\gamma+R)v = \sigma l$.

Der Widerstand R besteht hauptsächlich aus 3 Theilen; nämlich aus dem Widerstande r, den die Last ihrer eigenen Bewegung entgegensetzt; zweitens aus dem Widerstande der Maschiue, welcher zusammengesetzt ist aus der Reibung f der unbelasteten Maschine und aus der Zunahme dieser Reibung, welche von der Belastung herkommt, und von Pambour gleich δr gesetzt wird, so dass δ die Zunahme der Reibung der Maschine ist, welche eintritt, wenn die Reibung r der Last um eine Einheit zunimmt; drittens aus dem Gegendruck p der Luft oder des im Condensator übrig bleibenden Gemenges von Luft und Dampf. Demnach ist

$$R = r + \delta r + f + p. \qquad 8.$$

Der nutzbare Theil der bewegenden Arbeit oder der Nutzeffect ist $E = avr$, also

$$E = \frac{\sigma k - aq(\gamma+f+p)v}{q(1+\delta)} = \frac{\sigma}{q(1+\delta)}\left\{k - \frac{(\gamma+f+p)l}{(\gamma+P')(l'+c)}\right\}. \qquad 9.$$

Hiernach wird E am grössten, wenn v am kleinsten oder P' am grössten wird. Nennt man P die grösste Spannung, welche die Ventile im Kessel zulassen, ohne sich zu öffnen, so ist die kleinste Geschwindigkeit, nach 6.,

$$v' = \frac{\sigma l}{aq(l'+c)(\gamma+P)}. \qquad 10.$$

Der hiermit verbundene grösste Nutzeffect ergiebt sich aus 9.

$$E' = \frac{\sigma}{q(1+\delta)}\left\{k - \frac{(\gamma+f+p)l}{(l'+c)(\gamma+P)}\right\}. \qquad 11.$$

Da das Verhältniss der Absperrung, nämlich $\frac{l'}{l}$, willkürlich ist, so

kann man durch die Wahl von l' den Werth von E' zu einem Maximum steigern. Man findet, mit Rücksicht auf 4.,

$$l' = \frac{(\gamma + f + p)\, l}{\gamma + P} = hl \qquad 12.$$

für die vortheilhafteste Art der Absperrung, durch welche der Werth von E' erhöhet wird auf

$$E'' = \frac{\sigma}{q\,(1 + \delta)} \log \frac{l + c}{hl + c}. \qquad 13.$$

Der Nutzeffect einer Maschine von gegebener Construction, für welche also l, l', c, f, p sämmtlich gegeben sind, hängt nach 8. von der Menge σ des in jeder Secunde verdampften Wassers und von dem Drucke P' auf den Kolben ab, und wächst wenn beide, so weit es angeht, gesteigert werden.

Die Gleichung 12. drückt Pambour mit Rücksicht auf 2. so aus: Für das vortheilhafteste Verhältniss der Absperrung ist l' : l wie das Volumen des Dampfes von der Spannung P zu dem Volumen für die Spannung f + p. Jedoch ist auch dieses Verhältniss nur angenähert richtig. Rechnet man genau, ohne die angenäherte Formel 2. zu Grunde zu legen, so findet sich Folgendes: Es sei P der Druck des Dampfes im Cylinder, vor der Absperrung, μ das dazu gehörige relative Volumen, und allgemein, anstatt 2. $P = F(\mu)$, wo F eine Function anzeigt; so ist $\pi = F\left(\mu \cdot \frac{\lambda + c}{l' + c}\right)$.

Ferner hat man die Gleichungen: $Rl = Pl' + \int_{l'}^{l} \pi d\lambda$. $v = \frac{\sigma \mu l}{a(l' + c)}$, $R = r + p + f$. $E = avr = \frac{\sigma \mu l r}{l' + c}$. Hieraus folgt:

$$\frac{dE}{dl'} = \frac{\sigma \mu}{(l' + c)^2} H, \text{ wo } H = (l' + c)\, l \frac{dr}{dl'} - lr.$$

Um H zu finden, ist $\frac{dr}{dl'}$ zu entwickeln aus

$$rl = Pl' + \int_{l'}^{l} \pi d\lambda - (p + f)\, l, \text{ wo } \pi = F\left(\mu . \frac{\lambda + c}{l' + c}\right), \; P = F(\mu).$$

Hieraus folgt zuerst: $l \frac{dr}{dl'} = \int_{l'}^{l} \frac{d\pi}{dl'} d\lambda$. Es sei $\mu . \frac{\lambda + c}{l' + c} = u$, so ist

$$\pi = F(u), \; \frac{d\pi}{dl'} = \frac{d\pi}{du} \cdot \frac{du}{dl'} = - F'(u) . \frac{\mu(\lambda + c)}{(l' + c)^2} = - \frac{uF'u}{l' + c};$$

daher $l \frac{dr}{dl'} = - \int_{l'}^{l} u . F'u . \frac{d\lambda}{l' + c}$ oder $\mu l \frac{dr}{dl'} = - \int_{\mu}^{\mu \frac{l + c}{l' + c}} u F' u\, du.$

Dies giebt, da allgemein

$$-\int u F' u\, du = \int F u\,.\, du - u F u,\quad \mu l \frac{dr}{dl'} =$$

$$\int_{\mu}^{\mu\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)} F u\,.\, du - \mu\left(\frac{l+c}{l'+c}\right) F\left(\mu \frac{l+c}{l'+c}\right) + \mu F(\mu).$$

Hier ist $F(\mu) = P$ die Spannung vor der Absperrung, $F\left(\mu . \frac{l+c}{l'+c}\right) = P_1$ die Spannung am Ende des Kolbenlaufes; führt man ferne wieder $F(u) = \pi$, $u = \mu \frac{\lambda + c}{l' + c}$ ein, so folgt:

$$l \frac{dr}{dl'} = \frac{1}{l'+c} \int_{l'}^{l} \pi\, d\lambda - \frac{l+c}{l'+c} P_1 + P$$

und hieraus $H = (f + p) l + Pc - (l + c) P_1$.

Für das Maximum von E ist $\frac{dE}{dl'} = 0$, also $H = 0$; daher ist allgemein l' zu finden aus der Gleichung:

$$(l + c) F\left(\mu \frac{l+c}{l'+c}\right) = (f + p) l + c F(\mu).$$

Nach der obigen angenäherten Formel ist $F(\mu) = \frac{1}{q\mu} - \gamma$, woraus sich wieder die Gleichung 12. ergiebt.

Die in dem Werthe von R (Gl. 8.) vorkommenden Constanten müssen in jedem Falle durch Beobachtung bestimmt werden, wozu Pambour Anweisung giebt. Als numerisches Beispiel führe ich folgende Formel für eine Hochdruckmaschine ohne Absperrung an; für solche ist $l' = l$, also $k = \frac{l}{l+c}$ nach 4. Der freie Raum c ist $= \frac{1}{20} l$; daher $k = \frac{21}{20}$. Da keine Condensation Statt findet, so ist p der Druck der Luft, also $p = 14{,}71 \times 144$ ℔. engl. auf der Quadratfuss; ferner ist $n = 0{,}0001422 = q\gamma$, $q = 0{,}00000023$, wie schon oben angegeben. Die Relation 7. zwischen Belastung und Geschwindigkeit wird hiernach folgende:

$$a v = \frac{10000 . \sigma}{6{,}6075 + 0{,}002415\ (r + \delta r + f)}.$$

v ist die Geschwindigkeit des Kolbens in engl. Fussen für die Minute; a die Kolbenfläche; σ die Anzahl der in der Minute verdampften Cubikfuss Wasser. r ist der Druck der Last auf die Flächeneinheit des Kolbens. Der Coefficient δ ist etwa $= \frac{1}{7}$, und $f = 144$ ℔. auf den Quadratfuss; doch müssen diese Grössen in jedem Falle besonders ausgemittelt werden, indem man die Maschine un-

ter verschiedenen Belastungen beobachtet. Bezeichnet P die grösste zulässige Dampfspannung im Kessel, so ist R höchstens = P; also ist $r = \frac{P - f - 2118}{1 + \delta}$ der Grenzwerth, bis zu welchem der Widerstand der Belastung gesteigert werden darf.

Die vorstehende Theorie ist überhaupt auf Maschinen doppelter Wirkung, sowohl stehende als fortgehende, anwendbar; genauere Angaben über die Ermittelung der bei jeder Art vorkommenden Widerstände, muss man in den genannten Schriften, namentlich was die Reibung auf Eisenbahnen und in Dampfwagen betrifft, im 3ten und 4ten Capitel des Pambourschen Werkes über Dampfwagen nachsehen. Die Reibung der Bahnwagen schlägt Pambour durchschnittlich auf $\frac{1}{280}$, an, die der unbelasteten Dampfwagen auf $\frac{1}{150}$ ihres Gewichtes.

Bei den Maschinen einfacher Wirkung drückt der Dampf nur von der oberen Seite auf den Kolben, um die Last und ein angehängtes Gegengewicht zu haben; der Rückgang des Kolbens geschieht unbelastet durch die Wirkung dieses Gewichtes, und ist blos bestimmt die Maschine zu einem neuen Hube in Stand zu setzen. Dieser wird bewirkt, indem die Verbindung zwischen dem Kessel und dem oberen Theile des Cylinders einerseits und zwischen dem Condensator und dem unteren Theile des Cylinders andererseits sich öffnet, mithin der Dampf aus dem Kessel von oben auf den Kolben drückt, während der unter dem Kolben vom vorigen Hube übrig gebliebene Dampf niedergeschlagen wird. Nachdem der sinkende Kolben einen Theil seines Laufes vollbracht, wird der Cylinder gegen den Kessel abgesperrt, der Kolben aber von dem eingeschlossenen Dampfe weiter getrieben. Wenn er dem Ende seines Laufes nahe ist, so öffnet ein Ventil, genannt Gleichgewichts-Ventil, dem oberen Dampfe Zutritt in den Raum unter dem Kolben des Cylinders, und der Kolben, von beiden Seiten gleichmässig mit Dampf umgeben, also von keiner Kraft mehr getrieben, wird von den Widerständen bald zum Stehen gebracht, hierauf aber, der Last entledigt, durch das beim Niedergange gehobene Gegengewicht, z. B. durch das Gewicht der Pumpenstangen, wieder gehoben. Kurz vor dem Ende des steigenden Laufes schliesst sich das Gleichgewichts-Ventil; der Dampf, bisher über und unter dem Kolben gleichmässig verbreitet, dehnt sich nun unter dem Kolben aus, während der über diesem befindliche zusam-

mengedrückt und unter diesen Umständen der Kolbenlauf allmälig gehemmt wird.

Bei sinkendem Kolbenlaufe muss die Absperrung, bei steigendem der Augenblick des Schlusses des Gleichgewicht-Ventiles nach Maassgabe der Last so geregelt werden, dass der Kolben am Ende des Laufes jedesmal mit unmerklicher Geschwindigkeit anlangt, um keinen Stoss auszuüben. Dies geschieht bei dem Gebrauche dieser Maschinen durch Versuche; die von P. hierüber gegebene theoretische Berechnung ist folgende:

Für den Niedergang des Kolbens findet die oben entwickelte Gleichung 5. Statt, in welcher alle Buchstaben ihre frühere Bedeutung haben. Der Druck P' auf den Kolben, vor der Absperrung, ist aber bei diesen Maschinen, welche, ruckweise wirkend, jedesmal wenn der Kolben seinen höchsten Stand erreicht hat, völlig in Ruhe sind, der Spannung im Kessel gleich, also $P' = P$; daher ist

$$k\,(\gamma + P)\,(l' + c) - \gamma l = Rl \qquad \text{a.}$$

die erste Gleichung, wodurch die Gleichheit der bewegenden und der widerstehenden Arbeit für den Niedergang des Kolbens ausgedrückt wird. Der Werth von R ist

$$R = r + \delta r + p + f' + \Pi$$

Π ist das Gegengewicht und p die Spannung im Condensator, f' die Reibung der unbelasteten Maschine, r der Widerstand der Last, δ die Zunahme der Reibung der Maschine für jede Einheit von r; alle diese Kräfte auf die Kolbenfläche und auf die Flächeneinheit zurückgeführt, wie bisher.

Bei steigendem Kolbenhub ist wieder die bewegende Arbeit der widerstehenden gleich. Jene ist $\Pi a l$; diese besteht erstens aus der Reibung der unbelasteten Maschine, die mit f'' bezeichnet werde, indem sie wegen einiger Verschiedenheit der Umstände der vorigen f' nicht gleich ist; zweitens aus dem Widerstande des Dampfes, nachdem das Gleichgewichts-Ventil geschlossen ist. Es sei l'' der im Augenblicke dieses Schlusses durchlaufene Theil des Kolbenhubes. Der in diesem Augenblicke den ganzen Cylinder gleichmässig füllende Dampf hat die Spannung

$$\pi = (\gamma + P)\,\frac{l' + c}{l + 2c} - \gamma$$

da er sich von dem anfänglichen Volumen $a\,(l' + c)$ bis zu dem Volumen des Cylinders $a\,(l + 2c)$ ausgedehnt hat. Hat der Kol-

ben, weiter gehend, den Theil λ seines Laufes zurückgelegt, und bezeichnet man die Spannung unter ihm durch π', über ihm durch π'', so ist:

$$\pi' = (\gamma + \pi)\,\frac{l'' + c}{\lambda + c} - \gamma,\quad \pi'' = (\gamma + \pi)\,\frac{l - l'' + c}{l - \lambda + c} - \gamma$$

und der Widerstand des Dampfes auf den Kolben ist $a\,(\pi'' - \pi')$. Die gesammte widerstehende Arbeit ist hiernach

$$f''al + a\int_{l''}^{l}(\pi'' - \pi')\,d\lambda = \Pi\,al.$$

Vollzieht man die Integration, und setzt:

$$\frac{l - l'' + c}{l}\log\frac{l - l'' + c}{c} - \frac{l'' + c}{l}\log\frac{l + c}{l'' + c} = k' \text{ so kommt:}$$

$$k'\,(\gamma + P)\,\frac{l + 2c}{l' + c} + f'' = \Pi. \qquad \text{b.}$$

Die dritte Gleichung giebt die Geschwindigkeit der Maschine. Es sei ν die Anzahl der in der Zeiteinheit vollführten Doppelhübe, bei deren jedem das Volnmen $a\,(l'' + c)$ voll Dampf von der Spannung π aus dem Cylinder in den Condensator übergeht, nämlich das Volumen des nach geschlossenem Gleichgewichts-Ventile unter dem Kolben befindlichen Dampfes; es sei σ das Volumen des in der Zeiteinheit verdampften Wassers, mithin $\frac{\sigma}{q\,(\gamma + \pi)}$ das des daraus gebildeten Dampfes von der Spannung π, so ergiebt sich aus der Gleichheit zwischen dem entwickelten und dem verbrauchten Dampfe: $\nu\,.\,a\,(l'' + c) = \frac{\sigma}{q\,(\gamma + \pi)}$, oder für π seinen Werth gesetzt:

$$\nu = \frac{\sigma}{a\,q\,(\gamma + P)}\cdot\frac{l + 2c}{(l' + c)\,(l'' + c)}. \qquad \text{c.}$$

Bei gegebener Belastung dienen die Gleichungen a. und b. um zuerst l' und l'' so zu bestimmen, dass der Kolben jedesmal mit der Geschwindigkeit Null am Ende des Hubes anlangt, und mithin jeder Stoss vermieden werde. Die zu dieser Belastung gehörige Anzahl der Kolbenhübe findet sich sodann aus c. Um die Relation zwischen r und ν unmittelbar zu erhalten, müsste man l' und l'' aus diesen 3 Gleichungen eliminiren, was nicht algebraisch ausführbar ist. Weitere Betrachtungen über den Nutzeffect und dessen grössten Werth muss man in der angeführten Schrift nachsehen.

Eine Darstellung der Pambourschen Theorie und Anwendung auf verschiedene Maschinen findet man in folgender Schrift: Sammlung von Zeichnungen einiger ausgeführten Dampfkessel und

Dampfmaschinen, nebst Beschreibung derselben, und Berechnung der Dampfmaschinen nach der Pambourschen Theorie. Auf Veranlassung der Königl. techn. Deputation für Gewerbe bearbeitet von W. Nottebohm. Berlin bei Petsch 1841.

Eine Abhandlung von A. L. Crelle, über die Ausführbarkeit von Eisenbahnen in bergigen Gegenden, im Journal für Baukunst, Band 13, stützt sich ebenfalls auf diese Theorie. Man hat bisher, wenn steile Strecken auf Eisenbahnen nicht vermieden werden konnten, bei ihrer Ersteigung entweder stehende Maschinen angebracht oder die Last vermindert. Es giebt aber noch ein drittes Mittel, bestehend in einem an der Maschine anzubringenden sehr einfachen Räderwerk oder Vorgelege, durch welches bei Erklimmung des Abhanges die Geschwindigkeit vermindert, dagegen die Zugkraft, bei voller Dampfspannung im Cylinder, so weit gesteigert werden könnte, als das Eingreifen der Räder in die Schienen erlaubt. Maschinen dieser Einrichtung werden mit der vollen Last, die sie auf wagerechter Bahn mit grosser Geschwindigkeit fortziehen, eine steigende Bahnstrecke langsam erklimmen. Nähere Angaben sind in der Abhandlung nachzusehen.

November 1841.

S. 34. Z. 7. v. u. l.: $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} < 1.$

Vierzehnter Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung.

Von

O. J. Broch

zu Christiania.

Die allgemeinen Gesetze der unendlich kleinen Bewegungen eines oder zweier Systeme von Molekülen sind in den letzten zwei Jahren durch die Bemühungen der französischen Gelehrten P. H. Blanchet und besonders A. L. Cauchy zu einer Vollkommenheit gelangt, die es möglich macht, diese wichtige und erste Hauptabtheilung der mathematischen Theorie der unendlich kleinen Schwingungen als ein abgeschlossenes Ganzes zu behandeln. Die Abhandlungen dieser beiden Gelehrten sind ausserdem in Zeitschriften dermaassen zerstreut, dass ein geordneter und vollständiger Auszug derselben den Physico-Mathematikern unentbehrlich wird. Der Verfasser dieses Auszugs hat es sich angelegen sein lassen, die Schwierigkeiten, so weit der Raum, welcher diesem Theil der Physik hier gewidmet werden kann, es gestattet, zu beseitigen, so dass er selbst denen, die hiermit das Studium der mathemathischen Theorie des Lichts anfangen wollen, verständlich werden kann. —

In den Noten findet man überall die benutzten Abhandlungen citirt, so wie auch zur Erläuterung der schwierigeren Stellen auf die Werke Cauchy's und Anderer verwiesen ist. —

§. 1. Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung eines Systems von Molekülen*).

Betrachten wir ein System von Molekülen, die durch gegenseitige Anziehungs- und Abstossungskräfte in Gleichgewicht oder

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. p. 1—3.

Bewegung erhalten werden. Es seien im ersten Moment und im Zustande des Gleichgewichts:

x, y, z die Coordinaten der Moleküle $\mathfrak{m}$,

$x + \mathrm{x}, y + \mathrm{y}, z + \mathrm{z}$ die Coordinaten einer andern Moleküle m,

r der Radius vector, welcher von der Moleküle $\mathfrak{m}$ zur Moleküle m führt, so hat man:

$$\mathrm{r}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$$

und die Cosinus der Winkel, welche der Radius vector r mit den positiven Halbaxen der Coordinaten bildet, werden dann:

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}, \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}}, \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}}.$$

Nehmen wir ferner an, dass die gegenseitige Anziehung und Abstossung zweier Molekülen $\mathfrak{m}$ und m proportional mit den Massen $\mathfrak{m}$ und m und mit eine Function des Abstandes r sei, und folglich ohne Rücksicht auf die Zeichen durch

$$\mathfrak{m} m f(\mathrm{r})$$

ausgedrückt werden kann, indem $f(\mathrm{r})$ eine positive Grösse bezeichnet, wenn die Molekülen einander anziehen, eine negative, wenn sie einander abstossen.

Es sei jetzt

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(\mathrm{r})}{\mathrm{r}} = \mathfrak{f}(\mathrm{r})$$

das Potenzial der Kraft $f(\mathrm{r})$, so werden die Projectionen der Kraft $\mathfrak{m} m f(\mathrm{r})$ auf die Coordinataxen ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{m} m \mathrm{x} \mathfrak{f}(\mathrm{r}), \ \mathfrak{m} m \mathrm{y} \mathfrak{f}(\mathrm{r}), \ \mathfrak{m} m \mathrm{z} \mathfrak{f}(\mathrm{r})$$

und die Gleichungen des Gleichgewichts der Molekülen werden augenscheinlich:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} 0 &= S[m \mathrm{x} \mathfrak{f}(\mathrm{r})], \\ 0 &= S[m \mathrm{y} \mathfrak{f}(\mathrm{r})], \\ 0 &= S[m \mathrm{z} \mathfrak{f}(\mathrm{r})], \end{aligned}$$

wo das Zeichen S eine Summe ähnlicher Glieder bezeichnet, die sich auf die verschiedenen Molekülen m beziehen. —

Nehmen wir jetzt an, dass die Molekülen in Bewegung gesetzt werden. Es seien nach Verlauf einer Zeit t... ξ, υ, ζ, die Verschiebungen der Moleküle $\mathfrak{m}$ längs der drei Coordinataxen, und $\xi + \Delta\xi, \upsilon + \Delta\upsilon, \zeta + \Delta\zeta$ die, welche sich auf die Moleküle m beziehen, so werden am Ende der Zeit t:

$$x + \xi,\ y + \upsilon,\ z + \zeta$$

die Coordinaten der Moleküle $\mathfrak{m}$, und

$$x + \mathrm{x} + \xi + \Delta\xi,\ y + \mathrm{y} + \upsilon + \Delta\upsilon,\ z + \mathrm{z} + \zeta + \Delta\zeta$$

die der Moleküle m sein.

Es sei in demselben Zeitpunkt:

$$\mathrm{r} + \varrho$$

der Abstand der Molekülen $\mathfrak{m}$ und m. Die Projectionen des Abstandes $\mathrm{r} + \varrho$ auf die drei Coordinataxen werden gleich sein der Differenz zwischen den Coordinaten der Molekülen $\mathfrak{m}$ und m, also gleich:

$$\mathrm{x} + \Delta\xi,\ \mathrm{y} + \Delta\upsilon,\ \mathrm{z} + \Delta\zeta,$$

und man wird folglich haben:

$$(\mathrm{r} + \varrho)^2 = (\mathrm{x} + \Delta\xi)^2 + (\mathrm{y} + \Delta\upsilon)^2 + (\mathrm{z} + \Delta\zeta)^2.$$

Dies vorausgesetzt, um aus den Gleichungen (2) des Gleichgewichts die der Bewegung herzuleiten, ist es augenscheinlich nur nöthig, in jenen Formeln links vom Gleichheitszeichen statt Null die Differentialen

$$d_t^2 \xi,\ d_t^2 \upsilon,\ d_t^2 \zeta$$

zu substituiren, dann im zweiten Gliede statt des Abstandes r und seiner Projectionen x, y, z, den Abstand $\mathrm{r} + \varrho$ und seine Projectionen $\mathrm{x} + \Delta\xi$, $\mathrm{y} + \Delta\upsilon$, $\mathrm{z} + \Delta\zeta$ hineinzusetzen. Auf diese Weise erhält man die folgenden Gleichungen der Bewegung eines Systems von Molekülen:

$$(3)$$

$$d_t^2 \xi = S[\mathrm{m}(\mathrm{x} + \Delta\xi) f(\mathrm{r} + \varrho)],$$
$$d_t^2 \upsilon = S[\mathrm{m}(\mathrm{y} + \Delta\upsilon) f(\mathrm{r} + \varrho)],$$
$$d_t^2 \zeta = S[\mathrm{m}(\mathrm{z} + \Delta\zeta) f(\mathrm{r} + \varrho)].$$

§. 2. Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung zweier Systeme von Molekülen, die sich gegenseitig durchdringen*).

Betrachten wir jetzt zwei Systeme von Molekülen, die in demselben Theile des Raumes coexistiren.

Es seien im ersten Moment und im Zustande des Gleichgewichts:

x, y, z die Coordinaten einer Moleküle $\mathfrak{m}$ des ersten Systems oder einer Moleküle $\mathfrak{m}'$ des zweiten Systems,

$x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ die Coordinaten einer Moleküle m des ersten Systems oder einer Moleküle m' des zweiten Systems,

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 33—37.

und r der Radius vector, welcher von $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}'$ zur Moleküle m oder m' gezogen ist, so wird:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und die Cosinus der Winkel, welche dieser Radius vector r mit den Halbaxen der positiven Coordinaten bildet, werden dann gleich:

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$$

sein. Nehmen wir ferner an, dass die gegenseitige anziehende oder abstossende Kraft der zwei Massen $\mathfrak{m}$ und m oder $\mathfrak{m}'$ und m', proportional sei mit diesen Massen und mit einer Function des Abstandes, und folglich ausgedrückt werden kann durch

$$\mathfrak{m} m f(r)$$

für die Molekülen $\mathfrak{m}$ und m des ersten Systems, durch

$$\mathfrak{m} m' f_{,}(r)$$

für die Molekülen $\mathfrak{m}$ und m', unter denen die eine zum ersten, die andere zum zweiten Systeme gehört, und durch

$$\mathfrak{m}' m' f_{,,}(r)$$

für die Molekülen $\mathfrak{m}'$ und m' des zweiten Systems. Die Functionen $f(r)$, $f_{,}(r)$, $f_{,,}(r)$ werden dann als positive Grössen angesehen, wenn die Molekülen einander anziehen, als negative, wenn sie einander abstossen. Bildet man jetzt die Potenzialen dieser Kräfte, oder macht man:

(4)

$$\frac{f(r)}{r} = f(r), \quad \frac{f_{,}(r)}{r} = f_{,}(r), \quad \frac{f_{,,}(r)}{r} = f_{,,}(r),$$

so werden die Projectionen dieser drei Kräfte auf die Coordinatenaxen gleich sein, was die Kraft $\mathfrak{m} m f(r)$ betrifft:

$$\mathfrak{m} m x f(r), \quad \mathfrak{m} m y f(r), \quad \mathfrak{m} m z f(r),$$

was die Kraft $\mathfrak{m} m' f_{,}(r)$ betrifft:

$$\mathfrak{m} m' x f_{,}(r), \quad \mathfrak{m} m' y f_{,}(r), \quad \mathfrak{m} m' z f_{,}(r),$$

und was die Kraft $\mathfrak{m}' m' f_{,,}(r)$ betrifft:

$$\mathfrak{m}' m' x f_{,,}(r), \quad \mathfrak{m}' m' y f_{,,}(r), \quad \mathfrak{m}' m' z f_{,,}(r).$$

Die Gleichungen des Gleichgewichts der Molekülc $\mathfrak{m}$ werden dann sein:

(5)

$$0 = S[m x f(r)] + S[m' x f_{,}(r)],$$
$$0 = S[m y f(r)] + S[m' x f_{,}(r)],$$
$$0 = S[m z f(r)] + S[m' z f_{,}(r)],$$

wo das Zeichen S eine Summe ähnlicher Glieder bezeichnet, die sich auf die verschiedenen Molekülen m des ersten Systems und

auf die verschiedenen Molekülen m′ des zweiten Systems beziehen. Ebenso werden die Gleichungen des Gleichgewichts der Moleküle m′:

(6)

$$0 = S[m'xf_{,,}(r)] + S[mxf_{,}(r)],$$
$$0 = S[m'yf_{,,}(r)] + S[myf_{,}(r)],$$
$$0 = S[m'zf_{,,}(r)] + S[mzf_{,}(r)],$$

wo das Zeichen S eine Summe ähnlicher Glieder bezeichnet, die sich auf die verschiedenen Molekülen m′ des zweiten und m des ersten Systems beziehen.

Nehmen wir jetzt an, dass die verschiedenen Molekülen m, m, m′, m′.... sich zu bewegen anfangen. Es seien alsdann am Ende des Zeitraums t... ξ, υ, ζ die Verschiebungen der Moleküle m und ξ', υ', ζ' die Verschiebungen der Moleküle m′ parallel den drei Coordinataxen. Es seien ferner $\xi+\Delta\xi$, $\upsilon+\Delta\upsilon$, $\zeta+\Delta\zeta$ und $\xi'+\Delta\xi'$, $\upsilon'+\Delta\upsilon'$, $\zeta'+\Delta\zeta'$ die entsprechenden Verschiebungen der Molekülen m und m′. Die Coordinaten der Moleküle m werden dann am Ende des Zeitraums t sein:

$$x+\xi,\ y+\upsilon,\ z+\zeta,$$

die der Moleküle m′:

$$x+\xi',\ y+\upsilon',\ z+\zeta',$$

die der Moleküle m:

$$x+\mathrm{x}+\xi+\Delta\xi,\ y+\mathrm{y}+\upsilon+\Delta\upsilon,\ z+\mathrm{z}+\zeta+\Delta\zeta,$$

und die der Moleküle m′:

$$x+\mathrm{x}+\xi'+\Delta\xi',\ y+\mathrm{y}+\upsilon'+\Delta\upsilon',\ z+\mathrm{z}+\zeta'+\Delta\zeta'.$$

Es sei auch nach Verlauf desselben Zeitraums $r+\varrho$ der Abstand der Molekülen m, m; $r+\varrho_{,}$ der Abstand der Molekülen m, m′; $r+{}_{,}\varrho$ der Abstand der Moleküle m′, m, und $r+\varrho_{,,}$ der Abstand der Molekülen m′, m′. Es wird dann:

(7)

$$(r+\varrho)^2 = (\mathrm{x}+\Delta\xi)^2 + (\mathrm{y}+\Delta\upsilon)^2 + (\mathrm{z}+\Delta\zeta)^2,$$
$$(r+\varrho_{,})^2 = (\mathrm{x}+\xi'-\xi+\Delta\xi')^2 + (\mathrm{y}+\upsilon'-\upsilon+\Delta\upsilon')^2 + (\mathrm{z}+\zeta'-\zeta+\Delta\zeta')^2,$$
$$(r+{}_{,}\varrho)^2 = (\mathrm{x}+\xi-\xi'+\Delta\xi)^2 + (\mathrm{y}+\upsilon-\upsilon'+\Delta\upsilon)^2 + (\mathrm{z}+\zeta-\zeta'+\Delta\zeta)^2,$$
$$(r+\varrho_{,,})^2 = (\mathrm{x}+\Delta\xi')^2 + (\mathrm{y}+\Delta\upsilon') + (\mathrm{z}+\Delta\zeta')^2.$$

Um jetzt aus den Gleichungen des Gleichgewichts diejenigen der Bewegung herzuleiten, ist es nur nöthig, in jenen Formeln statt der ersten Theile die Differentialen $d_t^2\xi$, $d_t^2\upsilon$, $d_t^2\zeta$ und $d_t^2\xi'$, $d_t^2\upsilon'$, $d_t^2\zeta'$ zu substituiren und in die zweiten Theile statt des Abstandes r und seiner Projectionen x, y, z in die ersten Glieder der Gleichungen (5) $r+\varrho$ und seine Projectionen, in die zweiten

Glieder derselben Gleichungen $r+\varrho_{,}$ und seine Projectionen, in die ersten Glieder der Gleichungen $r+\varrho_{,,}$ und seine Projectionen, und endlich in die zweiten Glieder derselben Gleichungen $r+{}_{,}\varrho$ und seine Projectionen. Man erhält auf diese Weise folgende Gleichungen der Bewegung zweier Systeme von Molekülen:

(8)

$$\begin{aligned}
d_t^2\xi &= S[m(x+\Delta\xi)f(r+\varrho)] + S[m'(x+\xi'-\xi+\Delta\xi')f_{,}(r+\varrho_{,})],\\
d_t^2\upsilon &= S[m(y+\Delta\upsilon)f(r+\varrho)] + S[m'(y+\upsilon'-\upsilon+\Delta\upsilon')f_{,}(r+\varrho_{,})],\\
d_t^2\zeta &= S[m(z+\Delta\zeta)f(r+\varrho)] + S[m'(z+\zeta'-\zeta+\Delta\zeta')f_{,}(r+\varrho_{,})],\\
d_t^2\xi' &= S[m'(x+\Delta\xi')f_{,,}(r+\varrho_{,,})] + S[m(x+\xi-\xi'+\Delta\xi)f_{,}(r+{}_{,}\varrho)],\\
d_t^2\upsilon' &= S[m'(y+\Delta\upsilon')f_{,,}(r+\varrho_{,,})] + S[m(y+\upsilon-\upsilon'+\Delta\upsilon)f_{,}(r+{}_{,}\varrho)],\\
d_t^2\zeta' &= S[m'(z+\Delta\zeta')f_{,,}(r+\varrho_{,,})] + S[m(z+\zeta-\zeta'+\Delta\zeta)f_{,}(r+{}_{,}\varrho)].
\end{aligned}$$

§. 3. Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen eines Systems von Molekülen*).

Betrachten wir jetzt in einem gegebenen Systeme von Molekülen eine schwingende Bewegung, zufolge welcher jede Moleküle sich sehr wenig von ihrer anfänglichen Stellung entfernt. Die Verschiebungen ξ, υ, ζ, $\Delta\xi$, $\Delta\upsilon$, $\Delta\zeta$ können alsdann als unendlich kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden, deren höhere Potenzen man vernachlässigen kann. Man erhält dann:

(9)

$$\varrho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\upsilon + z\Delta\zeta}{r},$$

(10)

$$f(r+\varrho) = f(r) + \varrho\, d_r f(r),$$

und die Gleichungen (3) werden dann übergehen in:

(11)

$$\begin{aligned}
d_t^2\xi &= S[m f(r)\Delta\xi] + S[m\, d_r f(r)\, x\varrho],\\
d_t^2\upsilon &= S[m f(r)\Delta\upsilon] + S[m\, d_r f(r)\, y\varrho],\\
d_t^2\zeta &= S[m f(r)\Delta\zeta] + S[m\, d_r f(r)\, z\varrho],
\end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze wegen durch L, M, N, P, Q, R folgende characteristische Functionen bezeichnet:

(12)

$$L = S\left\{m\left(f(r) + \frac{x^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\},$$

$$M = S\left\{m\left(f(r) + \frac{y^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\},$$

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 3—6.

$$N = S\left\{m\left(f(r) + \frac{z^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\},$$
$$P = S\left\{m\frac{yz}{r} d_r f(r)\Delta\right\},$$
$$Q = S\left\{m\frac{xz}{r} d_r f(r)\Delta\right\},$$
$$R = S\left\{m\frac{yz}{r} d_r f(r)\Delta\right\},$$

in die folgenden Gleichungen:

(13)

$$d_t^2\xi = L\xi + R\upsilon + Q\zeta,$$
$$d_t^2\upsilon = R\xi + M\upsilon + P\zeta,$$
$$d_t^2\zeta = Q\xi + P\upsilon + N\zeta,$$

welche Gleichungen auch auf folgende Weise geschrieben werden können:

(14)

$$(L - d_t^2)\xi + P\upsilon + Q\zeta = 0,$$
$$R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta = 0,$$
$$Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta = 0.$$

Um diesen Gleichungen die Form lineärer Gleichungen partieller Differentiale zu geben, braucht man nur die endlichen Differenzen der Hauptvariabeln ξ, υ, ζ in Reihen nach ihren derivirten Functionen verschiedener Ordnung zu entwickeln, oder

(15)

$$\Delta = e^{xd_x + yd_y + zd_z} - 1 \text{ *)}$$

zu setzen. Die Coefficienten der derivirten Functionen der absolut Variabeln werden dann Summen der Form:

$$S[mx^n y^{n'} z^{n''} f(r)], \quad S[mx^n y^{n'} z^{n''} d_r f(r)],$$

wo n, n′, n″ ganze Zahlen bezeichnen.

Nimmt man jetzt an, die Constitution des gegebenen Systems von Molekülen sei überall dieselbe, so werden diese Summen sich auf constante Grössen reduciren, d. h. unabhängig von den Coordinaten x, y, z der Moleküle m sein. Die Gleichungen 14 können folglich als lineäre Gleichungen partieller Differentiale mit constanten Coefficienten zwischen den Hauptvariabeln ξ, υ, ζ und den Absolutvariabeln x, y, z, t betrachtet werden.

---

*) Man hat bei einer Variabel in Folge des Taylor'schen Theorems: $F(x + x) = e^{xd_x} F(x) = F(x) + \Delta F(x)$, folglich $\Delta = e^{xd_x} - 1$, und ebenso bei mehreren Variabeln.

§. 4. Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen zweier Systeme von Molekülen, die sich gegenseitig durchdringen*).

Betrachtet man wie im vorigen Paragraph nur die unendlich kleinen Bewegungen, so kann man die Hauptvariabeln $\xi, \upsilon, \zeta, \xi', \upsilon', \zeta'$, so wie ihre Differenzen $\Delta\xi$, $\Delta\upsilon$, $\Delta\zeta$, $\Delta\xi'$, $\Delta\upsilon'$, $\Delta\zeta'$ als unendlich kleine Grössen erster Ordnung ansehen, deren Quadrate und höhere Potenzen man vernachlässigen kann. Die Grössen ϱ, $\varrho_{,}$, ${}_{,}\varrho$, $\varrho_{,,}$ werden folglich auch Grössen derselben Ordnung, und man hat dann:

(16)

$$\varrho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\upsilon + z\Delta\zeta}{r},$$

$$\varrho_{,} = \frac{x(\xi' - \xi + \Delta\xi') + y(\upsilon' - \upsilon + \Delta\upsilon') + z(\zeta' - \zeta + \Delta\zeta')}{r},$$

$${}_{,}\varrho = \frac{x(\xi - \xi' + \Delta\xi) + y(\upsilon - \upsilon' + \Delta\upsilon) + z(\zeta - \zeta' + \Delta\zeta)}{r},$$

$$\varrho_{,,} = \frac{x\Delta\xi' + y\Delta\upsilon' + z\Delta\zeta'}{r};$$

ferner in Folge des Taylor'schen Theorems, wenn man die höheren Potenzen von ϱ, $\varrho_{,}$, ${}_{,}\varrho$, $\varrho_{,,}$ vernachlässigt:

(17)

$$f(r + \varrho) = f(r) + \varrho d_r f(r),$$
$$f(r + \varrho_{,}) = f(r) + \varrho_{,} d_r f(r), \text{ etc.}$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen (8) und berücksichtigt die Formeln 5 und 6, so erhält man:

(18)

$$d_t^2\xi = S[mf(r)\Delta\xi] + S[md_r f(r)x\varrho] + S[m'f_{,}(r)(\xi' - \xi + \Delta\xi')] + S[m'd_r f_{,}(r)x\varrho_{,}],$$

$$d_t^2\upsilon = S[mf(r)\Delta\upsilon] + S[md_r f(r)y\varrho] + S[m'f_{,}(r)(\upsilon' - \upsilon + \Delta\upsilon')] + S[m'd_r f_{,}(r)y\varrho_{,}],$$

$$d_t^2\zeta = S[mf(r)\Delta\zeta] + S[md_r f(r)z\varrho] + S[m'f_{,}(r)(\zeta' - \zeta + \Delta\zeta')] + S[m'd_r f_{,}(r)z\varrho_{,}],$$

$$d_t^2\xi' = S[m'f_{,,}(r)\Delta\xi'] + S[m'd_r f_{,,}(r)x\varrho_{,,}] + S[mf_{,}(r)(\xi - \xi' + \Delta\xi)] + S[md^r f_{,}(r)x{}_{,}\varrho],$$

$$d_t^2\upsilon' = S[m'f_{,,}(r)\Delta\upsilon'] + S[m'd_r f_{,,}(r)y\varrho_{,,}] + S[mf_{,}(r)(\upsilon - \upsilon' + \Delta\upsilon)] + S[md_r f_{,}(r)y{}_{,}\varrho],$$

$$d_t^2\zeta' = S[m'f_{,,}(r)\Delta\zeta'] + S[m'd_r f_{,,}(r)z\varrho_{,,}] + S[mf_{,}(r)(\zeta - \zeta' + \Delta\zeta)] + S[md_r f_{,}(r)z{}_{,}\varrho],$$

oder wenn man der Kürze wegen durch L, M..., $L_{,}$, $M_{,}$,...

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 36—42.

$,L$, $,M$, ... $L_{,,}$, $M_{,,}$, ... folgende characteristischen Functionen bezeichnet:

(19)

$$L = S\left\{m\left(f(r) + \frac{x^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{x^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$M = S\left\{m\left(f(r) + \frac{y^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{y^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$N = S\left\{m\left(f(r) + \frac{z^2}{r} d_r f(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{z^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$P = S\left\{m \frac{yz}{r} d_r f(r)\,\Delta\right\} - S\left\{m' \frac{yz}{r} d_r f_,(r)\right\},$$

$$Q = S\left\{m \frac{xz}{r} d_r f(r)\,\Delta\right\} - S\left\{m' \frac{xz}{r} d_r f_,(r)\right\},$$

$$R = S\left\{m \frac{xy}{r} d_r f(r)\,\Delta\right\} - S\left\{m' \frac{xy}{r} d_r f_,(r)\right\},$$

$$L_, = S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{x^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$M_, = S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{y^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$N_, = S\left\{m'\left(f_,(r) + \frac{z^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$P_, = S\left\{m' \frac{yz}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$Q_, = S\left\{m' \frac{xz}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$R_, = S\left\{m' \frac{xy}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$,L = S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{x^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$,M = S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{y^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$,N = S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{z^2}{r} d_r f_,(r)\right)(1+\Delta)\right\},$$

$$,P = S\left\{m \frac{yz}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$,Q = S\left\{m \frac{xz}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$,R = S\left\{m \frac{xy}{r} d_r f_,(r)\,(1+\Delta)\right\},$$

$$L_{,,} = S\left\{m'\left(f_{,,}(r) + \frac{x^2}{r} d_r f_{,,}(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{x^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$M_{,,} = S\left\{m'\left(f_{,,}(r) + \frac{y^2}{r} d_r f_{,,}(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{y^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$N_{,,} = S\left\{m'\left(f_{,,}(r) + \frac{z^2}{r} d_r f_{,,}(r)\right)\Delta\right\} - S\left\{m\left(f_,(r) + \frac{z^2}{r} d_r f_,(r)\right)\right\},$$

$$P_{,,} = S\left\{m'\frac{yz}{r}d_r f_{,,}(r)\Delta\right\} - S\left\{m\frac{yz}{r}d_r f_,(r)\right\},$$

$$Q_{,,} = S\left\{m'\frac{xz}{r}d_r f_{,,}(r)\Delta\right\} - S\left\{m\frac{xz}{r}d_r f_,(r)\right\},$$

$$R_{,,} = S\left\{m'\frac{xy}{r}d_r f_{,,}(r)\Delta\right\} - S\left\{m\frac{xy}{r}d_r f_,(r)\right\},$$

folgende characteristische Gleichungen:

(20)

$$\begin{aligned}
d_t^2\xi &= L\xi + R\upsilon + Q\zeta + L_,\xi' + R_,\upsilon' + Q_,\zeta',\\
d_t^2\upsilon &= R\xi + M\upsilon + P\zeta + R_,\xi' + M_,\upsilon' + P_,\zeta',\\
d_t^2\zeta &= Q\xi + P\upsilon + N\zeta + Q_,\xi' + P_,\upsilon' + N_,\zeta',\\
d_t^2\xi' &= {}_,L\xi + {}_,R\upsilon + {}_,Q\zeta + L_{,,}\xi' + R_{,,}\upsilon' + Q_{,,}\zeta',\\
d_t^2\upsilon' &= {}_,R\xi + {}_,M\upsilon + {}_,P\zeta + R_{,,}\xi' + M_{,,}\upsilon' + P_{,,}\zeta',\\
d_t^2\zeta' &= {}_,Q\xi + {}_,P\upsilon + {}_,N\zeta + Q_{,,}\xi' + P''\upsilon' + N_{,,}\zeta',
\end{aligned}$$

welche Gleichungen auch auf folgende Weise geschrieben werden können:

(21)

$$\begin{aligned}
(L - d_t^2)\xi + R\upsilon + Q\zeta + L_,\xi' + R_,\upsilon' + Q_,\zeta' &= 0,\\
R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta + R_,\xi' + M_,\upsilon' + P_,\zeta' &= 0,\\
Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta + Q_,\xi' + P_,\upsilon' + N_,\zeta' &= 0,\\
{}_,L\xi + {}_,R\upsilon + {}_,Q\zeta + (L_{,,} - d_t^2)\xi' + R_{,,}\upsilon' + Q_{,,}\zeta' &= 0,\\
{}_,R\xi + {}_,M\upsilon + {}_,P\zeta + R_{,,}\xi' + (M_{,,} - d_t^2)\upsilon + P_{,,}\zeta' &= 0,\\
{}_,Q\xi + {}_,P\upsilon + {}_,N\zeta + Q_{,,}\xi' + P_{,,}\upsilon' + (N_{,,} - d_t^2)\zeta' &= 0.
\end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt in diesen Gleichungen die endlichen Differenzen der Hauptvariabeln ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' in Reihen, die nach ihren derivirten Functionen verschiedener Ordnung entwickelt sind, oder setzt man:

(15)

$$\Delta = e^{xd_x + yd_y + zd_z} - 1,$$

so werden die obenstehenden Gleichungen die Form linearer partieller Differentialgleichungen bekommen. Die Coefficienten der derivirten Functionen der Absolut-Variabeln werden dann Summen der Form:

(22)

$S[m x^n y^{n'} z^{n''} f(r)]$, $S[m x^n y^{n'} z^{n''} d_r f(r)]$, $S[m' x^n y^{n'} z^{n''} f_,(r)]$, $S[m' x^n y^{n'} z^{n''} d_r f_,(r)]$,

$S[m' x^n y^{n'} z^{n''} f_{,,}(r)]$, $S[m' x^n y^{n'} z^{n''} d_r f_{,,}(r)]$, $S[m x^n y^{n'} z^{n''} f_,(r)]$, $S[m x^n y^{n'} z^{n''} d_r f_,(r)]$.

Nimmt man jetzt an, die Constitution des zweiten Systems von Molekülen sei überall dieselbe, so werden die vier mittleren Summen, die in den Coefficienten der drei letzten der Gleichungen 21 vorkommen, unabhängig von den Coordinaten x, y, z der Moleküle m′, folglich constante Grössen sein. Dies wird immer der Fall sein, wenn das zweite System ein homogener Körper ist. Sind dagegen, wie man in der Lichttheorie annimmt, die Molekülen des ersten Systems, welches wir Aether nennen, viel näher an einander gereiht, als in dem zweiten Systeme, so werden die zwei ersten und zwei letzten der Summen (22) periodisch werden und dieselben Werthe periodisch wiederbekommen, wenn jede der drei Coordinaten x, y, z in arithmetischer Progression wächst oder abnimmt, und die Exponenten dieser Progression werden immer sehr klein in Bezug auf die numerischen Werthe der Coordinaten x, y, z sein. Nun ist aber aus der Theorie der Differentialgleichungen bewiesen*), dass, wenn in einem System von linearen Differentialgleichungen zwischen mehreren Hauptvariabeln die Coefficienten dieser Variabeln und ihrer differentialen Functionen andere Variabeln x, y, z sind, welche periodisch dieselben Werthe erhalten, wenn man jede der unabhängigen Variabeln in einer arithmetischen Progression wachsen oder abnehmen lässt, z. B. wenn man x um ein Multiplum von a, y um ein Multiplum von b, und z um ein Multiplum von c variiren lässt, und diese Exponenten der Progressionen a, b, c sehr klein in Bezug auf die numerischen Werthe von x, y, z sind, alsdann werden die diesen Gleichungen entsprechenden Werthe der Hauptvariabeln mit denen zusammenfallen, welche man erhalten wird, wenn man in den gegebenen Differentialgleichungen jeden periodischen Coefficienten R durch seinen mittleren Werth $\frac{1}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c R\,dz\,dy\,dx$ ersetzt. —

Statt der Coefficienten L, M,... $L_{,,}$, $M_{,,}$,... kann man folglich ihre mittleren Werthe setzen, und alsdann die Gleichungen 21 als lineäre partielle Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten ansehen. —

---

*) Cauchy, Recueil de mémoires sur divers points de Physique-Mathématique pag. 99.

§. 5. Integration der Differentialgleichungen der unendlich kleinen Bewegungen eines oder zweier Systeme von Molekülen*).

Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen (14 und 21) benutzt man folgende Sätze der Lehre der Differentialgleichungen**).

Es seien gegeben zwischen mehreren Hauptvariabeln $\xi, \upsilon, \zeta \ldots$ und die unabhängigen Variabeln x, y, z, t mehrerer lineären Differententialgleichungen mit partiellen Differentialen und constanten Coefficienten, deren Anzahl gleich sei der der Hauptvariabeln; und so, dass kein Glied vorkommt, welches die Hauptvariabeln oder ihre Differentialen nicht enthält. Es sei ferner die Ordnung der in Bezug auf t derivirten Functionen der Hauptvariabeln gleich n′ für ξ, n″ für υ, n‴ für ζ u. s. w., und die Coefficienten von $d_t^{n'}\xi$, $d_t^{n''}\upsilon$, $d_t^{n'''}\zeta \ldots$ unabhängig von den Characteristiken d_x, d_y, d_z.

Setzen wir:

$$n = n' + n'' + n''' + \ldots .$$

und nehmen wir an, die Hauptvariabeln $\xi, \upsilon, \zeta \ldots\ldots$ verificiren nicht nur für jeden Werth von t die gegebenen Gleichungen, sondern auch für $t = 0$ die Bedingungsgleichungen:

(23)

$$\xi = \varphi(x, y, z); \quad d_t\xi = \varphi_{,}(x, y, x); \ldots\ldots\ldots d_t^{n'-1}\xi = \varphi_{n'-1}(x, y, z);$$

$$\upsilon = \chi(x, y, z); \quad d_t\upsilon = \chi_{,}(x, y, z); \ldots\ldots\ldots d_t^{n''-1}\upsilon = \chi_{n''-1}(x, y, z);$$

$$\zeta = \psi(x, y, z); \quad d_t\zeta = \psi_{,}(x, y, z); \ldots\ldots\ldots d_t^{n'''-1}\zeta = \psi_{n'''-1}(x, y, z);$$

. . . .

. . . .

Es sei ferner $\nabla = 0$ die characteristische Determinante der gegebenen Differentialgleichungen, d. i. die characteristische Gleichung, welche man erhält durch die Elimination von $\xi, \upsilon, \zeta \ldots$ indem man d_x, d_y, d_z, d_t als Coefficienten behandelt, und wir wollen annehmen, dass dieser Gleichung $\nabla = 0$ eine solche Form gegeben werde, dass der Coefficient des d_t^n die Einheit sei.

Es sei jetzt ω eine Function, welche für jeden Werth von t der Differentialgleichung nter Ordnung:

(24)

$$\nabla\omega = 0$$

genügt, und für $t = 0$ die Bedingungsgleichungen:

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. p. 94—101.

**) Idem p. 87.

(25)

$$\omega = 0,\ d_t\omega = 0 \ldots\ldots d_t^{n-1}\omega = \omega(x, y, z),$$

so wird diese Function ω die zur characteristischen Determinante $\nabla = 0$ gehörige principale Function genannt; es seien ferner:

$$\begin{array}{l} \varphi,\ \varphi_{\prime},\ \varphi_{\prime\prime} \ldots\ldots \varphi_{n'-1}, \\ \chi,\ \chi_{\prime},\ \chi_{\prime\prime} \ldots\ldots \chi_{n''-1}, \\ \psi,\ \psi_{\prime},\ \psi_{\prime\prime} \ldots\ldots \psi_{n'''-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

die Functionen, in welche ω übergeht, wenn man statt $\omega(x, y, z)$ successive die Anfangsfunctionen:

$$\begin{array}{l} \varphi(x, y, z),\ \varphi_{\prime}(x, y, z), \ldots\ldots \varphi_{n'-1}(x, y, z), \\ \chi(x, y, z),\ \chi_{\prime}(x, y, z), \ldots\ldots \chi_{n''-1}(x, y, z), \\ \psi(x, y, z),\ \psi_{\prime}(x, y, z), \ldots\ldots \psi_{n'''-1}(x, y, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

einsetzt. —

Um jetzt den gegebenen Differentialgleichungen genug zu thun, so dass alle die Bedingungen (23) erfüllt werden, braucht man nur die derivirten Functionen:

$$\begin{array}{l} d_t\xi,\ d_t^2\xi, \ldots\ldots\ldots d_t^{n'}\xi, \\ d_t\upsilon,\ d_t^2\upsilon, \ldots\ldots\ldots d_t^{n''}\upsilon, \\ d_t\zeta,\ d_t^2\zeta, \ldots\ldots\ldots d_t^{n'''}\zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

durch die Differenzen:

$$d_t\xi - \nabla\varphi;\ d_t^2\xi - \nabla(\varphi_{\prime} + d_t\varphi); \ldots\ldots$$
$$d_t^{n'}\xi - \nabla(\varphi_{n'-1} + d_t\varphi_{n'-2} + \ldots d_t^{n'-2}\varphi_{\prime} + d_t^{n'-1}\varphi);$$

$$d_t\upsilon - \nabla\chi;\ d_t^2\upsilon - \nabla(\chi_{\prime} + d_t\chi); \ldots\ldots$$
$$d_t^{n''}\upsilon - \nabla(\chi_{n''-1} + d_t\chi_{n''-2} + \ldots d_t^{n''-2}\chi_{\prime} + d_t^{n''-1}\chi);$$

$$d_t\zeta - \nabla\psi;\ d_t^2\zeta - \nabla(\psi_{\prime} + d_t\psi); \ldots\ldots$$
$$d_t^{n'''}\zeta - \nabla(\psi_{n'''-1} + d_t\psi_{n'''-2} + \ldots d_t^{n'''-2}\psi_{\prime} + d_t^{n'''-1}\psi);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zu ersetzen, dann die neuen Gleichungen in Bezug auf $\xi, \upsilon, \zeta \ldots$ aufzulösen, als wären die Characteristiken d_x, d_y, d_z, d_t wirkliche Grössen. —

Wenden wir diesen Satz auf die Gleichungen (14) an, so wird hier die characteristische Determinante:

(26)

$$\Delta = (d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - N) - P^2(d_t^2 - L) - Q^2(d_t^2 - M) - R^2(d_t^2 - N) - 2PQR = 0.$$

Nimmt man jetzt an, dass für $t = 0$:

(27)

$$\xi = \varphi(x, y, z); \quad \upsilon = \chi(x, y, z); \quad \zeta = \psi(x, y, z);$$
$$d_t\xi = \Phi(x, y, z); \quad d_t\upsilon = X(x, y, z); \quad d_t\zeta = \Psi(x, y, z);$$

so dass folglich die drei ersten Grössen die Anfangswerthe der Verschiebungen und die drei letzten die der Geschwindigkeiten bezeichnen; und bezeichnet man durch:

$$\varphi, \ \chi, \ \psi,$$
$$\Phi, \ X, \ \Psi,$$

die Werthe von ω, welche herauskommen, wenn man statt $\omega(x, y, z)$ successive die Functionen 27 einsetzt, so werden ξ, υ, ζ bestimmt werden durch die Gleichungen:

(28)

$$(L - d_t^2)\xi + R\upsilon + Q\zeta = -\nabla(\Phi + d_t\varphi),$$
$$R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta = -\nabla(X + d_t\chi),$$
$$Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta = -\nabla(\Psi + d_t\psi),$$

wenn man diese Gleichungen in Bezug auf ξ, υ, ζ auflöst, und die Characteristiken d_x, d_y, d_z, d_t als wirkliche Grössen betrachtet. Setzt man folglich:

(29)

$$\boldsymbol{L} = (d_t^2 - M)(d_t^2 - N) - P^2,$$
$$\boldsymbol{M} = (d_t^2 - L)(d_t^2 - N) - Q^2,$$
$$\boldsymbol{N} = (d_t^2 - L)(d_t^2 - M) - R^2,$$
$$\boldsymbol{P} = P(d_t^2 - L) - QR,$$
$$\boldsymbol{Q} = Q(d_t^2 - M) - PR,$$
$$\boldsymbol{R} = R(d_t^2 - N) - PQ,$$

so werden die allgemeinen Integrale der Gleichungen (14) sein:

(30)

$$\xi = \boldsymbol{L}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{R}(X + d_t\chi) + \boldsymbol{Q}(\Psi + d_t\psi),$$
$$\upsilon = \boldsymbol{R}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{M}(X + d_t\chi) + \boldsymbol{P}(\Psi + d_t\psi),$$
$$\zeta = \boldsymbol{Q}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{P}(X + d_t\chi) + \boldsymbol{N}(\Psi + d_t\psi). -$$

Integriren wir jetzt die Gleichungen (21). Ihre characteristische Determinante ist:

(31)

$$\nabla = (d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots = 0.$$

Nimmt man jetzt an, dass für $t = 0$:

(32)

$$\begin{aligned}
\xi &= \varphi(x,y,z); & \upsilon &= \chi(x,y,z); & \zeta &= \psi(x,y,z),\\
d_t\xi &= \Phi(x,y,z); & d_t\upsilon &= X(x,y,z); & d_t\zeta &= \Psi(x,y,z),\\
\xi' &= \varphi'(x,y,z); & \upsilon' &= \chi'(x,y,z); & \zeta' &= \psi'(x,y,z),\\
d_t\xi' &= \Phi'(x,y,z); & d_t\upsilon' &= X'(x,y,z); & d_t\zeta' &= \Psi'(x,y,z),
\end{aligned}$$

und bezeichnet man durch:

$$\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \varphi',\ \chi',\ \psi',$$
$$\Phi,\ X,\ \Psi,\ \Phi',\ X',\ \Psi',$$

die entsprechenden Werthe der principalen Function ω, so wird man die den Gleichungen (21) und (32) entsprechenden Werthe der Hauptvariabeln bekommen, wenn man die folgenden Gleichungen in Bezug auf ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' auflöst, als wären die Characteristiken d_x, d_y, d_z, d_t wirkliche Grössen, nämlich die Gleichungen:

(33)

$$\begin{aligned}
(L - d_t^2)\xi + R\upsilon + Q\zeta + L_{,}\xi' + R_{,}\upsilon' + Q_{,}\zeta' &= -\nabla(\Phi + d_t\varphi),\\
R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta + R_{,}\xi' + M_{,}\upsilon' + P_{,}\zeta' &= -\nabla(X + d_t\chi),\\
Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta + Q_{,}\xi' + P_{,}\upsilon' + N_{,}\zeta' &= -\nabla(\Psi + d_t\psi),\\
{}_{,}L\xi + {}_{,}R\upsilon + {}_{,}Q\zeta + (L_{,,} - d_t^2)\xi' + R_{,,}\upsilon' + Q_{,,}\zeta' &= -\nabla(\Phi' + d_t\varphi'),\\
{}_{,}R\xi + {}_{,}M\upsilon + {}_{,}P\zeta + R_{,,}\xi' + (M_{,,} - d_t^2)\upsilon' + P_{,,}\zeta' &= -\nabla(X' + d_t\chi'),\\
{}_{,}Q\xi + {}_{,}P\upsilon + {}_{,}N\zeta + Q_{,,}\xi' + P_{,,}\upsilon' + (N_{,,} - d_t^2)\zeta' &= -\nabla(\Psi' + d_t\psi').
\end{aligned}$$

Setzt man folglich:

(34)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= -(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{M} &= -(d_t^2 - L)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{N} &= -(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{L}_{,,} &= -(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{M}_{,,} &= -(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{N}_{,,} &= -(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,}) + \ldots.\\
\boldsymbol{L}_{,} &= +L_{,}(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
\boldsymbol{M}_{,} &= +M_{,}(d_t^2 - L)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
\boldsymbol{N}_{,} &= +N_{,}(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,}) - \ldots.\\
{}_{,}\boldsymbol{L} &= +{}_{,}L(d_t^2 - M)(d_t^2 - N)(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
{}_{,}\boldsymbol{M} &= +{}_{,}M(d_t^2 - L)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - N_{,,})\\
{}_{,}\boldsymbol{N} &= +{}_{,}N(d_t^2 - L)(d_t^2 - M)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})\\
\boldsymbol{P} &= +P(d_t^2 - L)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
\boldsymbol{Q} &= +Q(d_t^2 - M)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
\boldsymbol{R} &= +R(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,})(d_t^2 - N_{,,}) - \ldots.\\
\boldsymbol{P}_{,} &= +P_{,}(d_t^2 - L)(d_t^2 - N)(d_t^2 - L_{,,})(d_t^2 - M_{,,}) - \ldots.
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Q}_{,} = + \mathrm{Q}_{,} (d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{L}_{,,})(d_t^2 - \mathrm{M}_{,,}) - \ldots.$$
$$\boldsymbol{R}_{,} = + \mathrm{R}_{,} (d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{L}_{,,})(d_t^2 - \mathrm{N}_{,,}) - \ldots.$$
$${}_{,}\boldsymbol{P} = + {}_{,}\mathrm{P} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{L}_{,,})(d_t^2 - \mathrm{N}_{,,}) - \ldots.$$
$${}_{,}\boldsymbol{Q} = + {}_{,}\mathrm{Q} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{M}_{,,})(d_t^2 - \mathrm{N}_{,,}) - \ldots.$$
$${}_{,}\boldsymbol{R} = + {}_{,}\mathrm{R} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{M}_{,,})(d_t^2 - \mathrm{N}_{,,}) - \ldots.$$
$$\boldsymbol{P}_{,,} = + \mathrm{P}_{,,} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{L}_{,,}) - \ldots.$$
$$\boldsymbol{Q}_{,,} = + \mathrm{Q}_{,,} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{M}_{,,}) - \ldots.$$
$$\boldsymbol{R}_{,,} = + \mathrm{R}_{,,} (d_t^2 - \mathrm{L})(d_t^2 - \mathrm{M})(d_t^2 - \mathrm{N})(d_t^2 - \mathrm{N}_{,,}) - \ldots.$$

wo die sechs ersten Grössen characteristische Functionen zehnten Grades und die übrigen achten Grades in Bezug auf d_t sind, so erhält man:

(35)

$$\begin{aligned}
\xi &= \boldsymbol{L}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{R}(\mathrm{X} + d_t\chi) + \boldsymbol{Q}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{L}_{,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{R}_{,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{Q}_{,}(\Psi' + d_t\psi'), \\
\upsilon &= \boldsymbol{R}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{M}(\mathrm{X} + d_t\chi) + \boldsymbol{P}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{R}_{,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{M}_{,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{P}_{,}(\Psi' + d_t\psi'), \\
\zeta &= \boldsymbol{Q}(\Phi + d_t\varphi) + \boldsymbol{P}(\mathrm{X} + d_t\chi) + \boldsymbol{N}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{Q}_{,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{P}_{,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{N}_{,}(\Psi' + d_t\psi'), \\
\xi' &= {}_{,}\boldsymbol{L}(\Phi + d_t\varphi) + {}_{,}\boldsymbol{R}(\mathrm{X} + d_t\chi) + {}_{,}\boldsymbol{Q}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{L}_{,,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{R}_{,,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{Q}_{,,}(\Psi' + d_t\psi'), \\
\upsilon' &= {}_{,}\boldsymbol{R}(\Phi + d_t\varphi) + {}_{,}\boldsymbol{M}(\mathrm{X} + d_t\chi) + {}_{,}\boldsymbol{P}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{R}_{,,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{M}_{,,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{P}_{,,}(\Psi' + d_t\psi'), \\
\zeta_{,} &= {}_{,}\boldsymbol{O}(\Phi + d_t\varphi) + {}_{,}\boldsymbol{P}(\mathrm{X} + d_t\chi) + {}_{,}\boldsymbol{N}(\Psi + d_t\psi) + \\
&\quad + \boldsymbol{O}_{,,}(\Phi' + d_t\varphi') + \boldsymbol{P}_{,,}(\mathrm{X}' + d_t\chi') + \boldsymbol{N}_{,,}(\Psi' + d_t\psi').
\end{aligned}$$

§. 6. Von der principalen Function ω *).

Wie wir eben gesehen haben, hängen die allgemeinen Integralen der Differentialgleichungen (14) und (21) allein von der Bestimmung einer Function ω ab, die wir die principale Function genannt haben. Diese Function soll für jeden Werth von t die Differentialgleichung:

(24)

$$\nabla\omega = F(d_x, d_y, d_z, d_t)\omega = 0$$

verificiren, und für $t = 0$ die Gleichungen:

(25)

$$\omega = 0, \; d_t\omega = 0, \ldots\ldots \; d_t^{n-1}\omega = \omega(x, y, z)$$

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 76—94, 195—208 u. 411. Compte rendu Tome 13. pag. 40—46, 97—109, 109—124; Tome 14, pag. 2—8.

wo n die Anzahl der Hauptvariabeln bezeichnet, folglich für die Gleichungen (14) $n=3$ und für die Gleichungen (21) $n=6$. —

Es sei jetzt $f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu}$ eine Function der 6 Variabeln $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$, welche folgender Gleichung Genüge leistet:

(36)

$$\omega(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu} \omega(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

wo $\omega(x, y, z)$ eine willkührliche Function bezeichnet. Bezeichnen wir jetzt durch ϑ eine Function, welche für jeden Werth von t der Gleichung:

(37)

$$\nabla\vartheta = F(d_x, d_y, d_z, d_t)\,\vartheta = 0$$

und für $t=0$ den Gleichungen:

(38)

$$\vartheta = 0,\ d_t\vartheta = 0, \ldots\ d_t^{2n-1}\vartheta = f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu},$$

Genüge leistet, so wird folglich:

(39)

$$\omega = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vartheta\, \omega(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Diese Function würde nämlich in Folge der Bedingung (37) der Gleichung (24) und in Folge der Bedingungen (38) den Gleichungen (25) Genüge leisten. Wenn man also für eine besondere Function $f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu}$, welche die Bedingung (36) erfüllte, die principale Function ϑ kennete, so würde man durch die Formel (38) die jeder andern Function $\omega(x, y, z)$ entsprechende principale Function sogleich finden.

Man hat verschiedene Formen der Function $f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu}$. Die einfachste unter diesen ist:

(40)

$$f\binom{x, y, z}{\lambda, \mu, \nu} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)}\, du\, dv\, dw$$

Man hat nämlich für eine beliebige Function $\omega(x, y, z)$ immer die Formel:

(41)

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \times \omega(\lambda,\mu,\nu)\,.\,d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw\,^{*)}.$$

Um die zu diesem Werthe der Function $f\begin{pmatrix} x, y, z \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix}$ gehörige principale Function ϑ zu finden, bemerkt man, dass man im Allgemeinen der Gleichung (37) Genüge leistet, wenn man setzt:

(42)

$$\vartheta = e^{ux + vy + wz + st}\,\varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix},$$

wo $\varrho\,(u,v,w)$ eine beliebige Function von u, v, w bezeichnet, und s eine Wurzel der Gleichung:

(43)

$$S = F\,(u, v, w, s) = 0$$

bezeichnet, welche man erhält, wenn man in der characteristischen Determinante $\nabla = 0$, statt d_x, d_y, d_z, d_t die Grössen u, v, w, s setzt. Man erhält nämlich dann:

$$\nabla\vartheta = S e^{ux + vy + wz + st}\,\varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix},$$

folglich gleich Null. Sollte die Gleichung 43 mehrere gleiche Wurzeln haben, so dass: $S = (s-s_1)^{k_1}\,(s-s_2)^{k_2}\ldots\ldots(s-s_r)^{k_r}$, so würde man nicht allein den Werth (42), sondern auch den folgenden annehmen können:

---

*) Cauchy Ex. d'An et Ph. Math. pag. 77. Diese Formel wird aus der folgenden Fourier'schen hergeleitet:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x-\lambda)\sqrt{-1}}\, f(\lambda)\, du\, d\lambda,$$

und diese letztere Formel wiederum hergeleitet aus der folgenden:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos[u(x-\lambda)]\, du\, d\lambda,$$

(Fourier, théorie de la chaleur, pag. 525), indem man bemerkt, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin[u(x-\lambda)]\, du = 0.$$

(44)

$$\vartheta = d_s^a\, e^{ux + vy + wz + st}\, \varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix},$$

wo s eine der Wurzeln $s_1, s_2 \ldots s_r$ z. B. s_ν bezeichnet, und a jede beliebige ganze Zahl, welche kleiner als k_ν ist, bezeichnen kann. Man hat nämlich alsdann für $s = s_\nu$:

$$S = 0,\ d_s S = 0,\ d_s^2 S = 0, \ldots d_s^{k_\nu - 1} S = 0.$$

Statt dieser verschiedenen, durch die Gleichungen (42) und (44) gegebenen Werthe von ϑ kann man auch die Summe aller dieser Ausdrücke, jede durch eine beliebige, von x, y, z, t unabhängige Grösse multiplicirt oder dividirt, setzen, und man erhält folglich allgemeiner:

(45)

$$\vartheta = \mathcal{E}\, \frac{e^{ux + vy + wz + st}}{[(S)]_s}\, \varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix}\text{*)},$$

oder noch allgemeiner, wenn man successive u, v, w alle Werthen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ giebt, und die entsprechenden Werthe von ϑ addirt:

(46)

$$\vartheta = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\, \frac{e^{ux + vy + wz + st}}{[(S)]_s}\, \varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix} du\, dv\, dw.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf t und setzt dann $t = 0$, so erhält man:

(47)

$$\vartheta = 0,\ d_t \vartheta = 0,\ d_t^2 \vartheta = 0 \ldots\ldots$$

$$d_t^{2n-1} \vartheta = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux + vy + wz}\, \varrho\begin{pmatrix} u, v, w \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix} du\, dv\, dw,$$

---

*) Man hat nämlich (**Moigno** Lecons de calcul differentiel pag. 490):

$$\mathcal{E}\, \frac{f(s)}{[(s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \ldots (s - s_r)^{k_r}]} =$$

$$= \sum_{1}^{2n}{}_{\nu}\, \mathcal{E}\, \frac{f(s)}{(s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \ldots (s - s_{\nu-1})^{k_{\nu-1}} (s - s_{\nu+1})^{k_{\nu+1}} \ldots (s - s_{2r})^{k_r} [(s - s_\nu)^{k_\nu}}$$

$$= \sum_{1}^{2n}{}_{\nu}\, d_{s_\nu}^{\nu - 1} \left\{ \frac{f(s_\nu)}{(s_\nu - s_1)^{k_1} (s_\nu - s_2)^{k_2} \ldots (s_\nu - s_{\nu-1})^{k_{\nu-1}} (s_\nu - s_{\nu+1})^{k_{\nu+1}} \ldots (s_\nu - s_r)^{k_r}} \right.$$

(idem pag. 493).

weil, da S in Bezug auf s vom 2nten Grade ist, $\mathcal{E}\frac{s^m}{[(S)]_s}=0$, wenn $m<2n-1$ und $E\frac{s^m}{[(S)]_s}=1$, wenn $m=2n-1$ *). Um den Gleichungen (38) Genüge zu leisten, braucht man folglich nur anzunehmen:

(48)

$$f\binom{x,y,z}{\lambda,\mu,\nu}=\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux+vy+wz}\,\varrho\binom{u,v,w}{\lambda,\mu,\nu}du\,dv\,dw$$

und, wenn man diesen Werth von ω mit dem durch die Gleichung (40) gegebenen vergleicht:

(49)

$$S\binom{u,v,w}{\lambda,\mu,\nu}=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3}\,e^{-u\lambda-v\mu-w\nu}$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (46) hinein:

(50)

$$\vartheta=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}\frac{e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}}{[(S)]_s}du\,dv\,dw$$

und die Gleichung (41) giebt alsdann den folgenden Werth der principalen Function:

(51)

$$\omega=\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}\frac{e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st}}{[(S)]_s}\,.\,\omega(\lambda,\mu,\nu)\frac{d\lambda du}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{d\mu dv}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{d\nu dw}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Wenn man hier $\frac{u}{\sqrt{-1}}$, $\frac{v}{\sqrt{-1}}$, $\frac{w}{\sqrt{-1}}$, $\lambda-x$, $\mu-y$, $\nu-z$ als rechtwinklige Coordinaten betrachtet, so kann man dadurch, dass man sie in Polarcoordinaten verändert, eine andere Form der principalen Function erhalten. Setzen wir nämlich:

(52)

$$u=h\cos p\sqrt{-1},\quad v=h\sin p\cos q\sqrt{-1},\quad w=h\sin p\sin q\sqrt{-1},$$
$$\lambda-x=\varrho\cos\Theta,\quad \mu-y=\varrho\sin\Theta\cos\tau,\qquad \nu-x=\varrho\sin\Theta\sin\tau,$$

und der Kürze willen:

(53)

$$\cos\delta=\cos p\cos\Theta+\sin p\cos q\sin\Theta\cos\tau+\sin p\sin q\sin\Theta\sin\tau,$$

*) Moigno pag. 497.

so wird, wenn man die Formeln:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u,v,w)\,h^2 \sin p\,dp\,dq\,dh$$

und

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda - x, \mu - y, \nu - z)\,\varrho^2 \sin\Theta\,d\Theta\,d\tau\,d\varrho$$

berücksichtigt, die principale Function (51) die folgende Form annehmen:

(54)

$$\omega = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\,\frac{\omega(\lambda,\mu,\nu)\,e^{st - h\varrho\cos\delta\sqrt{-1}}}{[F(h\cos p\sqrt{-1}, h\sin p\cos q\sqrt{-1}, h\sin p\sin q\sqrt{-1}, s)]_{s}} \cdot h^2\varrho^2\,\frac{dh\,d\varrho}{2\pi}\cdot\frac{dp\,d\Theta}{2\pi}\cdot\frac{dq\,d\tau}{2\pi}.$$

Man könnte auch diese Formel direct herleiten auf demselben Wege, wie wir die Formel (51) fanden, indem man nämlich statt der Formel (41) die folgende anwendet:

(55)

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{\pi^2}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon\,\omega(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu}{[\varepsilon^2 + (\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2 + (\nu - z)^2]^2},$$

wo ε eine positive unendlich kleine Grösse bezeichnet *).

Der Werth der principalen Function ω kann folglich immer durch ein sechsfaches Integrale ausgedrückt werden. Für specielle Formen der characteristischen Determinante, so wie auch für besondere Initialwerthe von $d_t^{2n-1}\omega$ kann dieses sechsfache Integrale zu einem vierfachen oder doppelten Integrale reducirt oder sogar ohne Integralzeichen dargestellt werden.

Die verschiedenen speciellen Fälle, welche wir betrachten werden, sind folgende:

1) Wenn der Initialwerth von $d_t^{2n-1}\omega$, welchen wir durch $\omega(x,y,z)$ bezeichnet haben, eine Function von

*) Compte rendu Tome 13. pag. 9, 120—124.

$$ux + vy + wz,$$

oder von

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

oder von

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy,$$

oder nur im Allgemeinen eine Function von

$$x, y, z$$

ist.

2) Wenn die characteristische Determinante homogen in Bezug auf die Characteristiken d_x, d_y, d_z, d_t ist oder nicht.

3) Wenn die characteristische Determinante eine Function von d_t und von $d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$, oder von $ad_x^2 + bd_y^2 + cd_z^2 + 2dd_yd_z + 2ed_xd_z + 2fd_xd_y$ ist. —

Weil man statt $\omega(x, y, z)$ successive die Initialwerthe der Geschwindigkeiten und die der Verschiebungen einsetzt, so bedeuten nämlich die ersten vier Fälle, dass diese Werthe dieselben verbleiben in einem Plan, oder einer Kugeloberfläche, oder Ellipsoideoberfläche, oder irgend einer anderen Fläche, d. h. dass die Wellenfläche ursprünglich plan oder sphärisch, oder ellipsoidisch, oder von irgend einer anderen Form wäre. Die zwei folgenden Fälle sind, wie wir späterhin sehen werden, die, wenn die Gleichung der Wellenfläche unabhängig von der Dauer einer Vibration ist, d. h. wenn keine Dispersion stattfindet, oder wo die Dispersion stattfindet. Die zwei letzten Fälle sind die, wenn der Körper, in dem die Lichtwellen sich fortpflanzen, so beschaffen ist, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich sind in jedem Punkte einer Kugel- oder Ellipsoidenfläche.

Wenn die gegebene characteristische Gleichung homogen wäre, so dass folglich, falls man setzte:

(56)

$$s = h\omega\sqrt{-1}$$

man erhalten würde:

(57)

$$S = F(h\cos p\sqrt{-1}, h\sin p\cos q\sqrt{-1}, h\sin p\sin q\sqrt{-1}, s) =$$
$$= (h\sqrt{-1})^{2n} F(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q, \omega),$$

so würde man durch $2n-3$ mal wiederholte Differentiation der Gleichung (54) in Bezug auf t finden:

(58)

$$d_t^{2n-3}\omega =$$

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s^{2n-3}\,.\,\omega(\lambda,\mu,\nu)\,.\,e^{st-h\varrho\cos\delta\sqrt{-1}}}{[(h\sqrt{-1})^{2n}F(\cos p,\sin p\cos q,\sin p\sin q,\omega)]_{h\omega\sqrt{-1}}}\,.$$

$$.\ h^2\varrho^2\sin p\sin\Theta\frac{dh\,d\varrho}{2\pi}\,.\,\frac{dp\,d\Theta}{2\pi}\,.\,\frac{d\varrho\,d\tau}{2\pi}.$$

Man hat aber:

(59)

$$\mathcal{E}\frac{s^m e^{st}}{[S]_s} = \mathcal{E}\frac{s^m e^{st} d_\omega s}{[S]_\omega}\ {}^{*)},$$

folglich:

(60)

$$d_t^{2n-3}\omega = -\frac{1}{4}\mathcal{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{h(\omega t-\varrho\cos\delta)\sqrt{-1}}\,.\,\omega^{2n-3}\omega(\lambda,\mu,\nu)}{[F(\cos p,\sin p\cos q,\sin p\sin q,\omega)]_\omega}\,.$$

$$.\ \varrho^2\sin p\sin\Theta\frac{dh\,d\varrho}{2\pi}\,.\,\frac{dp\,d\Theta}{2\pi}\,.\,\frac{dp\,d\tau}{2\pi}.$$

Nun ist aber in Folge der Formel Fourier's **):

(61)

$$f(r) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varrho)\,e^{k(r-\varrho)\sqrt{-1}}\frac{dk\,d\varrho}{2\pi},$$

folglich, wenn man der Kürze willen setzt:

(62)

$$\lambda' = x + \frac{\omega t}{\cos\delta}\cos\Theta$$

$$\mu' = y + \frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\Theta\cos\tau$$

$$\nu' = z + \frac{\omega t}{\cos\delta}\sin\Theta\sin\tau$$

$$h\cos\delta = k$$

$$+\ dh\sqrt{\cos^2\delta} = dk,$$

damit die Integration in Bezug auf h und k dieselbe bleiben soll, wenn $\cos\delta$ das Zeichen ändert:

---

*) Cauchy Ex. de Math. Tome I. pag. 171.

**) S. die Anmerkung pag. 105.

(63)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^2 \omega(\lambda,\mu,\nu)\, e^{k\left(\frac{\omega t}{\cos\delta}-\varrho\right)\sqrt{-1}} dk\, d\varrho = 2\pi \frac{\omega^2 t^2}{\cos^2\delta}\, \omega(\lambda',\mu',\nu').$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung (60), so erhält man:

(64)

$$\omega = -\frac{d_t^{2n-3}}{z^4 \pi^2} \mathcal{E} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\omega^{2n-1}\omega(\lambda',\mu',\nu')\,.\,t^2 \sin p \sin\Theta\, dp\, d\Theta\, dq\, d\tau}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}\,[F(\cos p, \sin p\cos q, \sin p \sin q, \omega)]_\omega}.$$

Die principale Function kann folglich im Allgemeinen, wenn die characteristische Determinante homogen ist, auf ein vierfaches Integrale reducirt werden.

Es sei jetzt der Initialwerth von $d_t^{2n-1}\omega = \omega(x,y,z)$ nur abhängig von einer lineären Function der Variabeln x, y, z, so dass:

(65)

$$\omega(x,y,z) = \Pi(ux + vy + wz),$$

oder, wenn man um abzukürzen setzt:

(66)

$$\varsigma = ux + vy + wz,$$
$$\omega(x,y,z) = \Pi(\varsigma).$$

Man kann alsdann, wie bekannt, immer die Function $\Pi(\varsigma)$ in eine Reihe entwickeln, welche aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl Glieder der Form $\Theta e^{m\varsigma}$ besteht, wo Θ constant ist und m reell oder imaginär sein kann *), so dass folglich:

(67)

$$\Pi(\varsigma) = \Sigma\Theta e^{m_\nu \varsigma},$$

wo das Zeichen Σ sich auf die verschiedenen Werthe von m_ν bezieht. Der diesem Werthe von $\omega(x,y,z)$ entsprechende Werth der principalen Function ω wird alsdann die Summe sein der jedem Gliede der Reihe (67) entsprechenden principalen Functionen. Bezeichnet man folglich durch

$$\Pi_\nu(\varsigma) = \Theta e^{m_\nu \varsigma},$$

ein Glied der Reihe (67) und durch ω_ν die diesem Initialwerthe entsprechende principale Function, so wird:

---

*) Cauchy Ex. de Math. Tome II. pag. 112.

(68)

$$\omega = \Sigma \omega_\nu.$$

Nun ist aber klar, dass man der Gleichung:

$$\nabla \omega_\nu = F(d_x, d_y, d_z, d_t)\, \omega_\nu = 0$$

durch den Werth:

$$\omega_\nu = \Theta e^{m_\nu \varsigma + st}$$

genüget, wo s eine Wurzel der Gleichung:

$$F(m_\nu u, m_\nu v, m_\nu w, s) = 0$$

und folglich eine Function von m_ν

$$s = f(m_\nu)$$

ist, und

$$\omega_\nu = \Theta e^{m_\nu \varsigma + t f(m_\nu)} = F(m_\nu).$$

Nun ist aber nach der Formel Fourier's

(61)

$$F(m_\nu) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k(m_\nu - h')} F(h')\, dh'\, dk,$$

folglich

$$\omega_\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k(m_\nu - h')} \,.\, \Theta e^{h'\varsigma + t f(h')}\, dh'\, dk$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h'(\varsigma - k) + t f(h')} \,.\, \Pi_\nu(k)\, dh'\, dk$$

oder, wenn man $h' = h\sqrt{-1}$ setzt, und durch s eine Wurzel der Gleichung

$$F(hu\sqrt{-1}, hv\sqrt{-1}, hw\sqrt{-1}, s) = 0$$

bezeichnet:

$$\omega_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st + h(\varsigma - k)\sqrt{-1}}\, \Pi_\nu(k)\, dh\, dk,$$

folglich allgemeiner:

(69)

$$\omega_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{e^{st + h(\varsigma - h)\sqrt{-1}}\, \Pi_\nu\, k\, dh\, dk}{[F(hu\sqrt{-1}, hv\sqrt{-1}, hw\sqrt{-1}, s)]_s}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (68), so erhält man:

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\, \frac{e^{st + h(\varsigma - k)\sqrt{-1}}\, dh\, dk\, \Sigma\Pi_\nu(k)}{[F(hu\sqrt{-1},\, hv\sqrt{-1},\, hw\sqrt{-1},\, s)]_s}$$

oder weil:

$$\Sigma\Pi_\nu(k) = \Pi(k)$$

(70)

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\, \frac{e^{st + h(\varsigma - k)\sqrt{-1}}\, \Pi(k)\, dh\, dk}{[F(hu\sqrt{-1},\, hv\sqrt{-1},\, hw\sqrt{-1},\, s)]_s}.$$

Wäre noch dazu die characteristische Determinante $\nabla = 0$ homogen, so erhält man, wenn man setzt

$$s = .\, h\varphi\sqrt{-1}$$

aus der Formel (70), wenn man die Formel (59) berücksichtigt:

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\, \frac{e^{h(\varsigma + \varphi t - k)\sqrt{-1}}\, \Pi(k)\, dh\, dk}{(h\sqrt{-1})^{2n-1}\, [F(u, v, w, \varphi)]_\varphi},$$

und wenn man $2n - 1$ mal in Bezug auf t differentiirt:

(71)

$$d_t^{2n-1}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\, \frac{\varphi^{2n-1}\, e^{h(\varsigma + \varphi t - k)\sqrt{-1}}\, \Pi(k)\, dh\, dk}{[F(u, v, w, \varphi)]_\varphi}.$$

Nun ist aber nach der Formel Fourier's:

(61)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(\varsigma + \varphi t - b)\sqrt{-1}}\, \Pi(k)\, dh\, dk = \Pi(\varsigma + \varphi t),$$

folglich giebt die Gleichung (71):

(72)

$$d_t^{2n-1}\omega = \mathcal{E}\, \frac{\varphi^{2n-1}\Pi(\varsigma + \varphi t)}{[F(u, v, w, \varphi)]_\varphi},$$

und wenn man $2n - 1$ mal in Bezug auf t integrirt und s statt φ setzt:

(73)

$$\omega = d_t^{1-2n}\, \mathcal{E}\, \frac{s^{2n-1}\Pi(\varsigma + st)}{[F(u, v, w, s)]_s}.$$

Es sei jetzt der Initialwerth von $d_t^{2n-1}\omega = \omega(x, y, z)$ abhängig von einer ganzen homogenen Function zweiter Ordnung von x, y, z, so dass, wenn:

(74)

$$r = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy)^{\frac{1}{2}}$$

(75)

$$\omega(x, y, z) = \Pi(\mathrm{r}) = \Pi(-\mathrm{r}).$$

Dieser Initialwerth kann als eine Summe unendlich vieler Glieder, deren jedes eine lineäre Function von x, y, z ist, angesehen werden. Um dieses zu entwickeln, gehen wir von folgender, von Cauchy gegebenen Formel aus: *)

(76)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}\left(\frac{\varsigma'}{\tau}\right) \frac{\sin \mathrm{p}\, d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}}{\tau^3} = \frac{2\pi}{\Theta}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\mathrm{r}\cos \mathrm{p}) \sin \mathrm{p}\, d\mathrm{p},$$

wo $\mathrm{f}(x)$ eine beliebige Function von x bedeutet, und wo man hat:

(77)

$$\mathfrak{u} = \cos \mathrm{p}, \quad \mathfrak{v} = \sin \mathrm{p} \cos \mathrm{q}, \quad \mathfrak{w} = \sin \mathrm{p} \sin \mathrm{q}$$

$$\varsigma' = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z$$

$$\tau = (a\mathfrak{u}^2 + b\mathfrak{v}^2 + c\mathfrak{w}^2 + 2d\mathfrak{v}\mathfrak{w} + 2e\mathfrak{u}\mathfrak{w} + 2f\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\frac{1}{2}}$$

$$\Theta = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 - 2def)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{r} = (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + 2\mathrm{d}yz + 2\mathrm{e}xz + 2\mathrm{f}xy)^{\frac{1}{2}}$$

wo $a, b, c, d, e, f, x, y, z$ reelle Constanten bezeichnen, und a, b, c, d, e, f so bestimmt sind, dass, wenn man setzt:

(78)

$$aX + fY + eZ = X',$$
$$fX + bY + dZ = Y',$$
$$eX + dY + cZ = Z',$$

man erhält:

(79)

$$X = \mathrm{a}X' + \mathrm{f}Y' + \mathrm{e}Z',$$
$$Y = \mathrm{f}X' + \mathrm{b}Y' + \mathrm{d}Z',$$
$$Z = \mathrm{e}X' + \mathrm{d}Y' + \mathrm{c}Z',$$

und folglich:

(80)

$$\mathrm{a} = \frac{cb - d^2}{\Theta^2}, \quad \mathrm{b} = \frac{ac - e^2}{\Theta^2}, \quad \mathrm{c} = \frac{ab - f^2}{\Theta^2},$$

$$\mathrm{d} = \frac{ef - ad}{\Theta^2}, \quad \mathrm{e} = \frac{fd - be}{\Theta^2}, \quad \mathrm{f} = \frac{de - cf}{\Theta^2}. \text{ —}$$

Setzt man jetzt in der Gleichung (76) $\mathrm{f}(x) = \mathrm{d}_x \mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}'(x)$ und führt die Integration rechter Seite aus, so erhält man:

(81)

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathrm{r}) - \mathfrak{F}(-\mathrm{r})}{\mathrm{r}} = \frac{\Theta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{F}'\left(\frac{\varsigma'}{\tau}\right) \frac{\sin \mathrm{p}\, d\mathrm{p}\, d\mathrm{q}}{\tau^3}.$$

---

*) Cauchy Ex. de Math. Tome V.

Bemerkt man ferner, dass in Folge der Gleichungen (80)

(82)

$$\Theta = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{-\frac{1}{2}}$$

und wenn man der Kürze willen setzt:

(83)

$$T = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\varsigma'}{\tau} = \frac{\mathfrak{u}}{\tau}x + \frac{\mathfrak{v}}{\tau}y + \frac{\mathfrak{w}}{\tau}z = \varsigma'',$$

so kann die Gleichung (81) auf folgende Weise geschrieben werden:

(84)

$$\frac{\mathfrak{F}(r) - \mathfrak{F}(-r)}{r} = \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{F}'(\varsigma'') \frac{\sin p \, dp \, dq}{\tau^3}.$$

Setzt man jetzt

(85)

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{x} = \Pi(x),$$

und bemerkt, dass $\Pi(r) = \Pi(-r)$, folglich $\mathfrak{F}(r) = -\mathfrak{F}(r)$, so wird:

(86)

$$\Pi(r) = \frac{1}{2\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{F}(\varsigma'') \frac{\sin p \, dp \, dq}{\tau^3}.$$

Der Initialwerth $\Pi(r)$ kann folglich als eine Summe unendlich vieler Glieder angesehen werden, deren jedes eine lineäre Function von x, y, z ist, nämlich von

(83)

$$\varsigma'' = \frac{\mathfrak{u}}{\tau}x + \frac{\mathfrak{v}}{\tau}y + \frac{\mathfrak{w}}{\tau}z.$$

Bezeichnet man folglich durch ω, die zum Initialwerthe $d_t^{2n-1}\omega, = \mathfrak{F}(\varsigma'')$ gehörige principale Function, so wird

(84)

$$\omega = \frac{1}{4\pi T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\omega, \sin p \, dp \, dq}{\tau^3}.$$

Nun ist aber wegen der Formel (70)

(85)

$$\omega, = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{e^{st + h(\varsigma'' - k)\sqrt{-1}} \cdot \mathfrak{F}'(k) \, dh \, dk}{\left[\mathfrak{F}\left(\frac{h\mathfrak{u}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{v}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{w}\sqrt{-1}}{\tau}, s\right)\right]_s}$$

oder wenn die characteristische Gleichung homogen ist, in Folge der Formel (73)

(86)

$$\omega_{,} = d_t^{1-2n}\, \mathcal{E} \frac{s^{2n-1} \mathfrak{F}'(\varsigma'' + st)}{\left[F\left(\frac{\mathfrak{u}}{\tau}, \frac{\mathfrak{v}}{\tau}, \frac{\mathfrak{w}}{\tau}, s\right)\right]_s}.$$

Folglich wird, wenn die characteristische Gleichung nicht homogen ist,

(87)

$$\omega = \frac{1}{8\pi^2 T} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{e^{st + h(\varsigma'' - k)\sqrt{-1}} \mathfrak{F}'(k) \sin p\, dh\, dk\, dp\, dq}{\tau^3 \left[F\left(\frac{h\mathfrak{u}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{v}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{w}\sqrt{-1}}{\tau}, s\right)\right]_s}$$

und wenn sie homogen ist:

(88)

$$\omega = \frac{d_t^{1-2n}}{4\pi T} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E} \frac{s^{2n-1} \mathfrak{F}'(\varsigma'' + st) \sin p\, dp\, dq}{\tau^3 \left[F\left(\frac{\mathfrak{u}}{\tau}, \frac{\mathfrak{v}}{\tau}, \frac{\mathfrak{w}}{\tau}, s\right)\right]_s}.$$

Die letzte Gleichung kann man unter eine andere Form bringen, wenn man berücksichtigt, dass:

$$s\mathfrak{F}'(\varsigma'' + st) = d_t \mathfrak{F}(\varsigma'' + st) = d_t[(\varsigma'' + st)\,\Pi(\varsigma'' + st)]$$

und

$$\tau F\left(\frac{\mathfrak{u}}{\tau}, \frac{\mathfrak{v}}{\tau}, \frac{\mathfrak{w}}{\tau}, s\right) = F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \varrho),$$

wo:

$$\varrho = s\tau.$$

Man erhält dann:

$$\omega = \frac{d_t^{2-2n}}{4\pi T} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varrho^{2n-2}(\varsigma' + \varrho t)\,\Pi\left(\frac{\varsigma' + \varrho t}{\tau}\right) \sin p\, dp\, dq}{\tau^2 [F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \varrho)]_s}$$

und wenn man bemerkt, dass:*)

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(\varrho)}{[F]_\varrho} = \mathcal{E} \frac{\varphi(\varrho)\, d_\varrho s}{[F]_\varrho} = \mathcal{E} \frac{\varphi(\varrho)}{\tau [F]_\varrho}.$$

so erhält man, wenn man s statt ϱ setzt,

(89)

$$\omega = \frac{d_t^{2-2n}}{4\pi T} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{s^{2n-2}(\varsigma' + st)\,\Pi\left(\frac{\varsigma' + st}{\tau}\right) \sin p\, dp\, dq}{\tau^3 [F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s}.$$

---

*) Cauchy Ex. de Math. Tome I. pag. 171.

Wäre endlich der Initialwerth von $d_t^{2n-1}\omega = \omega(x, y, z)$ eine Function der Grösse:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so braucht man nur in den vorhergehenden Formeln zu setzen:

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c} = 1, \quad \mathrm{d} = \mathrm{e} = \mathrm{f} = 0,$$

folglich:

$$a = b = c = 1, \quad d = e = f = 0,$$
$$\tau^2 = 1, \qquad T = 1,$$

und man erhält folglich, wenn die characteristische Gleichung nicht homogen ist:

(90)

$$\omega = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}\frac{e^{st + h(\varsigma' - k)\sqrt{-1}}\,\mathfrak{F}'(k)\sin p\,dh\,dk\,dp\,dq}{[F(h\mathfrak{u}\sqrt{-1},\, h\mathfrak{v}\sqrt{-1},\, h\mathfrak{w}\sqrt{-1},\, s)]_s}$$

und wenn die characteristische Gleichung homogen ist:

(91)

$$\omega = \frac{d_t^{2-2n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{E}\frac{s^{2n-2}(\varsigma' + st)\,\Pi(\varsigma' + st)\sin p\,dp\,dq}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s}.$$

Wäre in der characteristischen Determinante der erste Theil eine Function von d_t und $a d_x^2 + b d_y^2 + c d_z^2 + 2d\,d_y d_z + 2e\,d_x d_z + 2f\,d_x d_y$, so würden $F\left(\frac{\mathfrak{u}}{\tau}, \frac{\mathfrak{v}}{\tau}, \frac{\mathfrak{w}}{\tau}, s\right)$ und $F\left(\frac{h\mathfrak{u}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{v}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{w}\sqrt{-1}}{\tau}, s\right)$ unabhängig von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ werden, weil

(77)

$$a\mathfrak{u}^2 + b\mathfrak{v}^2 + c\mathfrak{w}^2 + 2d\mathfrak{v}\mathfrak{w} + 2e\mathfrak{u}\mathfrak{w} + 2f\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \tau^2,$$

und die Gleichungen (87) und (88) würden alsdann in Folge der Formel (84) die folgenden Formen annehmen:

(92)

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}\frac{\mathfrak{F}'(k)\,e^{st - hk\sqrt{-1}}.\sin hr\,.\,dh\,dk}{hr\left[F\left(\frac{h\mathfrak{u}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{v}\sqrt{-1}}{\tau}, \frac{h\mathfrak{w}\sqrt{-1}}{\tau}, s\right)\right]_s},$$

(93)

$$\omega = d_t^{1-2n}\,\mathcal{E}\frac{s^{2n-1}\left[\left(r + \frac{st}{\tau}\right)\Pi\left(r + \frac{st}{\tau}\right) + \left(r - \frac{st}{\tau}\right)\Pi\left(r - \frac{st}{\tau}\right)\right]}{2r\,[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s}.$$

Ebenso werden die Gleichungen (90) und (91), wenn der erste Theil der characteristischen Determinante eine Function von d_t und $d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$ ist, die Form annehmen:

(94)

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{\mathfrak{F}'(k)\, e^{st - hk\sqrt{-1}} \sin h\varrho\, dh\, dk}{h\varrho\,[F(h\mathfrak{u}\sqrt{-1}, h\mathfrak{v}\sqrt{-1}, h\mathfrak{w}\sqrt{-1}, s)]_s},$$

(95)

$$\omega = d_t^{1-2n}\, \mathcal{E} \frac{s^{2n-1}\,[(\varrho + st)\,\Pi\,(\varrho + st) + (\varrho - st)\,\Pi\,(\varrho - st)]}{2\varrho\,[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s}. -$$

§. 7. Von der Wellenfläche und von der characteristischen Fläche*).

Wenn man in der characteristischen Gleichung $\nabla = F(d_x, d_y, d_z, d_t)$ statt der partiellen Differentialen verschiedener Ordnung in Bezug auf x, y, z und t die entsprechenden Potenzen derselben Variabeln setzt, so wird die hierdurch hervorgebrachte Gleichung

(96)

$$F(x, y, z, t) = 0$$

die einer Fläche sein, welche man die characteristische Fläche nennt. —

Die Werthe der unendlich kleinen Verschiebungen der Molekülen, welche durch die Gleichungen (30) und (35) gegeben sind, können verschwinden für verschiedene Werthe der Absolut-Variabeln x, y, z, t; diese Werthe sind von einer Gleichung abhängig, und die Fläche, welche diese Gleichung darstellt, und in welcher folglich keine Verschiebung zur Zeit t stattfindet, wird die Wellenfläche genannt. Wir werden sie durch die Gleichung:

(97)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = 0$$

darstellen. —

Die Gleichungen (35) geben die folgenden Werthe von ξ:

(98)

$$\xi = L \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} \cdot e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \cdot \frac{du d\lambda}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{dv d\mu}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{dw d\nu}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot [\Phi(\lambda, \mu, \nu) + s\varphi(\lambda, \mu, \nu)] +$$

$$+ R \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} \cdot e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \cdot \frac{du d\lambda}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{dv d\mu}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{dw d\nu}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot [X(\lambda, \mu, \nu) + s\chi(\lambda, \mu, \nu)] +$$

$+$ u. s. w.

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome II. pag. 99—108. und

und ähnliche Werthe der übrigen Variabeln υ, ζ, ξ', υ', ζ'. — Damit diese Werthe nun Null werden sollen, ist nothwendig und hinreichend, dass:

(99)

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z + \mathrm{s}t = 0$$

für jeden Werth von s, welchem die Gleichung:

$$F(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}) = 0$$

entspricht, weil man alsdann hat unter den Integralzeichen:

$$\mathcal{E} \frac{\text{Const.}}{[F(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s})]_{\mathrm{s}}} = 0.$$

Die Gleichung (99) stellt einen Plan vor, welcher für verschiedene Werthe von u, v, w verschiedene Stellungen einnimmt, und in diesem Plan finden folglich keine Verschiebungen statt. Die Enveloppe von allen diesen Plänen wird folglich die Wellenfläche sein. Um die Gleichung dieser Enveloppe zu erhalten, muss man u, v, w eliminiren aus den Gleichungen: *)

(100)

$$\begin{aligned} \mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z + \mathrm{s}t &= 0, \\ x + t\mathrm{d_u s} &= 0, \\ y + t\mathrm{d_v s} &= 0, \\ z + t\mathrm{d_w s} &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben:

$$\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{d_u s}}{\mathrm{d_v s}},$$

und wenn man durch s_1, s_2, s_3 . . . s_{2n} die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$F(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}) = 0$$

bezeichnet:

$$\frac{x}{y} = \frac{d_u s_1}{d_v s_1} = \frac{d_u s_2}{d_v s_2} = \frac{d_u s_3}{d_v s_3} = \ldots\ldots = \frac{d_u s_{2n}}{d_v s_{2n}} =$$

$$= \frac{d_u(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{2n})}{d_v(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{2n})} = \frac{d_u(s_1 s_2 + s_1 s_3 + \ldots + s_1 s_{2n} + s_2 s_3 + \ldots)}{d_v(s_1 s_2 + s_1 s_3 + \ldots + s_1 s_{2n} + s_2 s_3 + \ldots)} =$$

$$= \frac{d_u(s_1 s_2 s_3 + \ldots\ldots)}{d_v(s_1 s_2 s_3 + \ldots\ldots)} = \text{u.s.w.}$$

und folglich

Compte rendu Tome XIII. pag. 1—16, 184—188, 189—197. Blanchet, Journal de Math. publié par Lionville, pag. 13—23, 23—35.

*) Moigno Leçons de calcul différentiel pag. 454.

(101)

$$\frac{x}{y} = \frac{d_u[F(u,v,w,s)]}{d_v[F(u,v,w,s)]}.$$

Ebenso findet man:

(102)

$$\frac{x}{z} = \frac{d_u[F(u,v,w,s)]}{d_w[F(u,v,w,s)]}.$$

Statt der letzten drei Gleichungen (100) kann man folglich setzen:

$$\frac{x}{d_u F(u,v,w,s)} = \frac{y}{d_v F(u,v,w,s)} = \frac{z}{d_w F(u,v,w,s)},$$

und man erhält folglich die Gleichung der Wellenfläche (97), wenn man u, v, w aus den folgenden Gleichungen eliminirt:

(103)

$$F(u,v,w,s) = 0,$$
$$ux + vy + wz + st = 0,$$
$$\frac{x}{d_u F(u,v,w,s)} = \frac{y}{d_v F(u,v,w,s)} = \frac{z}{d_w F(u,v,w,s)}.$$

Wenn die characteristische Fläche homogen wird, so wird s in selbiger Zeit wie u, v, w aus den Gleichungen (103) wegeliminirt und die Gleichung der Wellenfläche wird folglich unabhängig von s, d. h. wie wir späterhin sehen werden, von der Schwingungsdauer werden. Man kann folglich in den Gleichungen (103) s einen willkührlichen Werth geben, z. B. $= -t$ setzen, und wenn man dann durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten eines Punkts der characteristischen Fläche und durch x, y, z die eines Punkts der Wellenfläche bezeichnet, so finden zwischen ihnen die folgenden Gleichungen statt:

(104)

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0,$$
$$\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z - t^2 = 0,$$
$$\frac{x}{d_{\mathfrak{x}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)} = \frac{y}{d_{\mathfrak{y}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)} = \frac{z}{d_{\mathfrak{z}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist die der characteristischen Fläche, und wenn man durch

(97)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung der Wellenfläche bezeichnet, so wird man folglich auch haben:

(105)

$$\frac{\mathfrak{x}}{d_x \mathfrak{F}(x, y, z, t)} = \frac{\mathfrak{y}}{d_y \mathfrak{F}(x, y, z, t)} = \frac{\mathfrak{z}}{d_z \mathfrak{F}(x, y, z, t)}.$$

Diese zwei Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und (x, y, z), unter denen der eine in der characteristischen Fläche, der andere in der Wellenfläche gelegen ist, und welche durch die Gleichungen (104) und (105) mit einander verbunden sind, werden correspondirende Gleichungen dieser zwei Flächen genannt. Nennen wir ϱ und r die vom Anfangspunkte der Coordinaten zu den Punkten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und (x, y, z) gezogenen Radii vectores, und δ den Winkel, welchen sie unter einander bilden, so wird nach der zweiten der Gleichungen (104):

(106)

$$r\varrho \cos\delta = t^2.$$

Wenn die characteristische Determinante homogen ist, und man zieht am Ende der Zeit t zwei Radii vectores zu zwei correspondirenden Punkten der characteristischen Fläche und der Wellenfläche, so wird das Product von einem mit der Projection des andern auf ihm gleich dem Quadrat der Zeit sein. In Folge der letzten der Gleichungen (104) und der Gleichung (105) wird der tangirende Plan durch die eine der zwei correspondirenden Punkte auf dem Radius vector des zweiten Punkts perpendiculär sein. Die Gleichung des tangirenden Plans zur characteristischen Fläche $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0$ durch den Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ wird nämlich sein:

(107)

$$(\xi - \mathfrak{x})\, d_{\mathfrak{x}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) + (\upsilon - \mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{y}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) + (\zeta - \mathfrak{z})\, d_{\mathfrak{z}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t) = 0$$

und die Gleichung des Radius vector r:

$$\frac{\overline{\xi} - x}{x} = \frac{\overline{\upsilon} - y}{y} = \frac{\overline{\zeta} - z}{z}$$

und diese Gleichung kann in Folge der letzten der Gleichungen (104) so geschrieben werden:

$$\frac{\overline{\xi} - x}{d_{\mathfrak{x}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)} = \frac{\overline{\upsilon} - y}{d_{\mathfrak{y}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)} = \frac{\overline{\zeta} - z}{d_{\mathfrak{z}} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)},$$

was eben die Gleichung einer auf dem Plane (107) perpendiculären Linie ist.

Um aus der homogenen characteristischen Fläche die Wellenfläche herzuleiten, oder umgekehrt, braucht man daher nur auf dem Radius vector zu einer Fläche das Verhältniss zwischen dem Quadrat der Zeit und diesem Radius vector abzusetzen, dann durch den Endpunkt ein auf dem Radius vector perpendiculärer Plan zu legen. Die zweite Oberfläche wird die sein, welche dieser Plan in seinen verschiedenen Stellungen immer tangirt. —

Man sieht hieraus, dass der Winkel δ, welchen die zwei Radii vectores zu zwei correspondirenden Punkten in den beiden Flächen mit einander bilden, gleich ist dem Winkel, welchen jeder Radius vector mit der Normale zur entsprechenden Fläche bildet.

Weil $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)$ immer eine Function von t^2 ist, so hat man, wenn sie zugleich eine homogene Function ist,

$$F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},t) = F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},-t) = F(-\mathfrak{x},-\mathfrak{y},-\mathfrak{z},t) = F(-\mathfrak{x},-\mathfrak{y},-\mathfrak{z},-t),$$

und folglich wegen der Gleichungen (104) auch:

$$\mathfrak{F}(x,y,z,t) = \mathfrak{F}(x,y,z,-t) = \mathfrak{F}(-x,-y,-z,t) = \mathfrak{F}(-x,-y,-z,-t).$$

Jede gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt wird, ist folglich ein Diameter beider Oberflächen, und der Anfangspunkt das Centrum derselben.

Wenn man nun ein System von Molekülen betrachtet, so ist die Gleichung

$$F(u, v, w, s) = 0$$

dritten Grades in Bezug auf s^2, und hat in Bezug auf s^2 lauter reelle Wurzeln. Sie ist nämlich hervorgegangen aus der Elimination von ξ, υ, ζ aus den Gleichungen:

(108)

$$(\mathfrak{L} - s^2)\xi + \mathfrak{R}\upsilon + \mathfrak{Q}\zeta = 0,$$
$$\mathfrak{R}\xi + (\mathfrak{M} - s)\upsilon + \mathfrak{P}\zeta = 0,$$
$$\mathfrak{Q}\xi + \mathfrak{P}\upsilon + (\mathfrak{N} - s^2)\zeta = 0,$$

wo $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ die den characteristischen Functionen L, M, N, P, Q, R entsprechenden Werthe bezeichnen, wenn man in diesen statt d_x, d_y, d_z die Grössen u, v, w setzt. Setzt man der Kürze willen:

$$\mathfrak{L}\xi + \mathfrak{R}\upsilon + \mathfrak{Q}\zeta = \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{R}\xi + \mathfrak{M}\upsilon + \mathfrak{P}\zeta = \mathfrak{F},$$
$$\mathfrak{Q}\xi + \mathfrak{P}\upsilon + \mathfrak{N}\zeta = \mathfrak{G},$$

so können die Gleichungen (108) so geschrieben werden:

$$\mathfrak{E} = \xi s^2, \quad \mathfrak{F} = \upsilon s^2, \quad \mathfrak{G} = \zeta s^2.$$

Bezeichnet man jetzt durch s_1^2, s_2^2, s_3^2 die drei Wurzeln der Gleichung $F(u, v, w, s) = 0$, durch $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die entsprechenden Werthe von ξ, υ, ζ, und durch $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, so erhält man:

(109)

$$\mathfrak{E}_1 = \xi_1 s_1^2; \quad \mathfrak{E}_2 = \xi_2 s_2^2; \quad \mathfrak{E}_3 = \xi_3 s_3^2,$$
$$\mathfrak{F}_1 = \upsilon_1 s_1^2; \quad \mathfrak{F}_2 = \upsilon_2 s_2^2; \quad \mathfrak{F}_3 = \upsilon_3 s_3^2,$$
$$\mathfrak{G}_1 = \zeta_1 s_1^2; \quad \mathfrak{G}_2 = \zeta_2 s_2^2; \quad \mathfrak{G}_3 = \zeta_3 s_3^2. -$$

Wäre einer der drei Werthe von s^2 imaginär, so muss, weil die Coefficienten der Gleichung $F(u, v, w, s) = 0$ reelle Functionen von u, v, w sind, ein anderer Werth von s^2, z. B. s_2^2, dem erstern Werthe conjungirt sein. Dann müssen aber auch ξ_1 und ξ_2, υ_1 und υ_2, ζ_1 und ζ_2 conjungirte Ausdrücke sein, so dass:

$$\xi_1 = a + \alpha\sqrt{-1},\ \xi_2 = a - \alpha\sqrt{-1},$$
$$\upsilon_1 = b + \beta\sqrt{-1},\ \upsilon_2 = b - \beta\sqrt{-1},$$
$$\zeta_2 = c + \gamma\sqrt{-1},\ \zeta_2 = c - \gamma\sqrt{-1}.$$

Man erhält nun aber aus den Gleichungen (109):

$$\frac{\xi_2\mathfrak{E}_1 + \upsilon_2\mathfrak{F}_1 + \zeta_2\mathfrak{G}_1}{s_1^2} = \frac{\xi_1\mathfrak{E}_2 + \upsilon_1\mathfrak{F}_2 + \zeta_1\mathfrak{G}_2}{s_2^2} = \xi_1\xi_2 + \upsilon_1\upsilon_2 + \zeta_1\zeta_2.$$

In diesen Brüchen sind nun die Nenner ungleich, die Zähler aber gleich, nämlich jeder von beiden gleich:

$$\mathfrak{L}\xi_1\xi_2 + \mathfrak{M}\upsilon_1\upsilon_2 + \mathfrak{N}\zeta_1\zeta_2 + \mathfrak{P}(\upsilon_1\zeta_2 + \upsilon_2\zeta_1) + \mathfrak{Q}(\xi_1\zeta_2 + \xi_2\zeta_1) + \\ + \mathfrak{R}(\xi_1\upsilon_2 + \xi_2\upsilon_1).$$

Die Zähler müssen folglich gleich Null sein, und folglich auch

$$\xi_1\xi_2 + \upsilon_1\upsilon_2 + \zeta_1\zeta_2 = 0,$$

oder, wenn man die Werthe von ξ_1, ξ_2, υ_1, υ_2, ζ_1, ζ_2 substituirt,

$$a^2 + \alpha^2 + b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 = 0,$$

was unmöglich ist. Die Gleichung $F(u, v, w, s) = 0$ hat folglich in Bezug auf s^2 drei reelle Wurzeln.

§. 8. Reduction der einer homogenen characteristischen Gleichung entsprechenden principalen Function ω, wenn die characterische Gleichung lauter reelle Wurzeln hat und der Anfangswerth von $d_t^{2n-1}\omega$ nur innerhalb einer sehr kleinen Kugelfläche merkbar ist*).

Es sei die characteristische Gleichung:

$$\nabla = F(d_x, d_y, d_z, d_t) = 0,$$

die in Bezug auf d_t^2 aufgelöst lauter reelle Wurzeln hat, und der Anfangswerth von

$$d_t^{2n-1}\omega = \Pi(r),$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

eine gerade Function von r, welche verschwindet ausserhalb der Grenzen:

$$r = +\varepsilon,\ r = -\varepsilon,$$

---

*) Compte rendu Tome XIII. pag. 397—412, 455—467, 487—497, 564—579, 1087—1095.

wo ε eine sehr kleine Grösse bezeichnet. Man hat dann die Gleichung:

(91)

$$\omega = \frac{d_t^{2-2n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{s^{2n-2} . \varrho . \Pi(\varrho)}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} \sin p \, dp \, dq$$

wo:

(110)

$$\varrho = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z + st$$
$$\mathfrak{u} = \cos p, \quad \mathfrak{v} = \sin p \cos q, \quad \mathfrak{w} = \sin p \sin q.$$

Denken wir uns jetzt um den Anfangspunkt der Coordinaten eine Kugelfläche beschrieben, deren Radius die Einheit ist, und nennen wir $\mathfrak{b}$ den durch die Polarcoordinaten p und q bestimmten Punkt dieser Fläche, so wird der Ausdruck:

$$\sin p \, dp \, dq$$

das zum Punkte $\mathfrak{b}$ gehörige Element derselben vorstellen. Nennen wir dieses Element ϑ und bezeichnen durch Θ den Theil des Residuums:

$$\mathcal{E} \frac{s^{2n-2} \varrho \Pi(\varrho)}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s},$$

welche den Polarcoordinaten p und q und einer bestimmten Wurzel s^2 der Gleichung:

$$F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s) = 0,$$

die nach der obigen Bedingung lauter reelle Wurzeln hat, entspricht. Man hat dann:

(111)

$$\omega = \frac{d_t^{2n-2}}{4\pi} \Sigma \Theta . \vartheta,$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle Werthe von ϑ und s erstreckt.

Unter den verschiedenen Elementen der Kugelfläche $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ werden wir jetzt diejenigen aussuchen, welche denselben Werthen von ϱ entsprechen. Wenn man in der Gleichung:

(110)

$$\varrho = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z + st$$

ϱ als constant und $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ als Variabeln ansieht, so wird diese Gleichung einen Plan vorstellen, welcher perpendiculär auf dem Radius vector O$\mathfrak{b}$ ist. Wenn die Winkel p und q variiren, wird dieser Plan folglich auch seine Stellung ändern, so dass er immer eine Fläche:

(112)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t, \varrho) = 0$$

tangirt. Wir werden diese Fläche durch LMN bezeichnen. Setzt man hier $\varrho = 0$, so wird:

$$\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z + \mathfrak{s}\mathfrak{t} = 0$$

und die Gleichung (112) wird folglich die der Wellenfläche:

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \mathfrak{t}) = 0$$

werden, und die Flächen, welche durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \mathfrak{t}, -\varrho) = 0 \text{ und } \mathfrak{F}(x, y, z, \mathfrak{t}, +\varrho) = 0$$

ausgedrückt sind, werden die innere und äussere Enveloppe des Raums vorstellen, welcher von einer beweglichen Kugelfläche beschrieben wird, deren Radius $= \varrho$ ist und deren Centrum auf die Wellenfläche herumgeführt wird. Bezeichnen wir jetzt durch T den Punkt, wo der auf dem Radius vector $O\mathfrak{d}$ perpendiculäre Plan:

(110)

$$\varrho = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z + \mathfrak{s}\mathfrak{t}$$

die Fläche (112) LMN tangirt, und ziehen wir durch T eine gerade Linie parallel mit $O\mathfrak{d}$, so wird diese Linie sowohl zur Fläche (112) LMN, wie auch zur Wellenfläche normal sein, und die letztere in einem Punkte D schneiden. Der Abstand TD beider Flächen wird dann eben den Zahlenwerth von ϱ vorstellen. Um jetzt alle die Punkte T, welche bestimmten Werthen von x, y, z und ϱ entsprechen, zu finden, muss man durch den Punkt (x, y, z), den wir durch A bezeichnen werden, eine Kegelfläche legen, welche die Fläche (112) LMN überall tangirt. Der Punkt T kann dann ein beliebiger Punkt der Berührungslinie $TT'T''$ sein. Zieht man jetzt durch alle Punkte dieser Linie Normalen zur Fläche (112), LMN, und durch den Anfangspunkt der Coordinaten O Linien parallel mit diesen Normalen, so werden diese die um O beschriebene Kugelfläche in einer Linie $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ schneiden, welche den Platz der Elemente ϑ, ϑ', ϑ'' andeuten wird, die demselben Werthe von x, y, z und ϱ entsprechen.

Da $F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{s})$ eine homogene Gleichung ist, und in Bezug auf $\mathfrak{s}$ geraden Grades, so wird Θ denselben Werth erhalten, wenn man $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{s}$ mit $-\mathfrak{u}$, $-\mathfrak{v}$, $-\mathfrak{w}$, $-\mathfrak{s}$ vertauscht, und man braucht folglich in der Summe $\Sigma\Theta\vartheta$ nur die Glieder zu berechnen, welche einem positiven Werthe von $\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z$ entsprechen, oder Werthen von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, die der Gleichung:

(113)

$$\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z > 0$$

Genüge leisten, wenn nur dann das Resultat verdoppelt wird.

Setzt man sodann:

(114)

$$P = \frac{1}{4\pi} \Sigma \Theta \vartheta,$$

wo das Summationszeichen sich nicht auf die verschiedenen Werthe von s erstreckt, und nur auf die Werthe von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, welche der Gleichung (113) Genüge leisten, so wird:

(115)

$$d_t^{2n-2}\omega = 2\Sigma P,$$

wo das Summationszeichen sich auf die verschiedenen Werthe von s bezieht.

Wenn jetzt der Initialwerth von $d_t^{2n-1}\omega$ oder der Function $\Pi(r)$ nur einen merklichen Werth hat innerhalb einer sehr kleinen Kugelfläche, deren Radius $= \varepsilon$ und deren Centrum der Anfangspunkt O der Coordinaten ist, so braucht man augenscheinlich in der Summe ϑ, ϑ', ϑ'' zu berücksichtigen, welche Werthe von ϱ entsprechen, die zwischen den Grenzen:

$$\varrho = -\varepsilon \text{ und } \varrho = +\varepsilon$$

eingeschlossen sind.

Es sei jetzt λ der Abstand des Punkts x, y, z, A von der Wellenfläche und eine sehr kleine Grösse, so wird der durch die Berührungslinie $TT'T''$ eingeschlossene Flächenraum der Fläche LMN immer sehr klein werden, und annäherungsweise eine Zone bilden, deren Höhe gleich $(\lambda - \varrho)$ wird. Zieht man vom Anfangspunkt O der Coordinaten aus Radii vectores zur Linie $TT'T''$ und verlängert diese, bis sie die Wellenfläche in einer Linie $SS'S''$ schneiden, so wird diese Linie auf der Wellenfläche eine Zone einschliessen, die der auf der Fläche LMN annäherungsweise congruent sein wird. Verlängert man jetzt die Radii vectores $O\mathfrak{v}, O\mathfrak{v}', O\mathfrak{v}''$, bis sie die characteristische Fläche schneiden, und nennt die auf dieser Fläche abgeschnittene Linie $VV'V''$, so werden die Linien $SS'S''$ und $VV'V''$ correspondirende Linien werden, die erste auf der Wellenfläche, die zweite auf der characteristischen Fläche. Der von der letzten Linie eingeschlossene Flächenraum wird dann annäherungsweise eine Zone werden, deren Höhe wir durch τ bezeichnen wollen. Um diese zu finden, betrachten wir zwei correspondirende Punkte S und V der Linien $SS'S''$ und $VV'V''$. Bezeichnen wir durch $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$, $Z + \Delta Z$ die

Coordinaten des Punkts *S*, und durch $\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Punkts *V*; bezeichnen wir ferner durch *D* den Punkt, wo die durch *A* gezogene Normale zur Wellenfläche diese trifft, und durch *E* den correspondirenden Punkt der characteristischen Fläche, durch X, Y, Z die Coordinaten des Punkts *D*, und durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die des Punkts *E*, so werden in Folge der Gleichungen (104), (97) und (105):

(116)

$$\mathfrak{S} = \mathrm{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\, t) = 0, \quad \mathfrak{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, t) = 0,$$

$$\mathfrak{x}\mathrm{X} + \mathfrak{y}\mathrm{Y} + \mathfrak{z}\mathrm{Z} - t^2 = 0,$$

$$\frac{d_{\mathfrak{x}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}{\mathrm{X}} = \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}{\mathrm{Y}} = \frac{d_{\mathfrak{z}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}{\mathrm{Z}},$$

(117)

$$\mathrm{F}(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z}, t) = 0, \quad \mathfrak{F}(\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X},\ \mathrm{Y}+\Delta\mathrm{Y},\ \mathrm{Z}+\Delta\mathrm{Z}, t) = 0,$$

$$(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x})(\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}) + (\mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y})(\mathrm{Y}+\Delta\mathrm{Y}) + (\mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z})(\mathrm{Z}+\Delta\mathrm{Z}) - t^2 = 0,$$

$$\frac{d_{\mathfrak{x}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z},\ t)}{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} = \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z},\ t)}{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{Y}} =$$

$$= \frac{d_{\mathfrak{z}}\mathrm{F}(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z},\ t)}{\mathrm{Z}+\Delta\mathrm{Z}}.$$

Entwickelt man jetzt die erste der Gleichungen und berücksichtigt die erste der Gleichungen (116), (117), so erhält man:

(118)

$$\Delta\mathfrak{x} \,.\, d_{\mathfrak{x}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{y}\, d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + \tfrac{1}{2}(\Delta\mathfrak{x}^2 d_{\mathfrak{x}}^2\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{y}^2 d_{\mathfrak{y}}^2\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{z}^2 d_{\mathfrak{z}}^2\mathfrak{S} +$$
$$+ 2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{y}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{S}) + \ldots = 0,$$

und wenn man die dritte der Gleichungen (117) entwickelt, und die höheren Potenzen von $\Delta\mathfrak{x}$, $\Delta\mathfrak{y}$, $\Delta\mathfrak{z}$, $\Delta\mathrm{X}$, $\Delta\mathrm{Y}$, $\Delta\mathrm{Z}$ vernachlässigt:

$$\frac{d_{\mathfrak{x}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{x}\, d_{\mathfrak{x}}^2\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{y}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S}}{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} =$$

$$= \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{x}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{y}\, d_{\mathfrak{y}}^2\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{y}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S}}{\mathrm{Y}+\Delta\mathrm{Y}} =$$

$$= \frac{d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{x}\, d_{\mathfrak{x}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{y}\, d_{\mathfrak{y}} d_{\mathfrak{z}}\mathfrak{S} + \Delta\mathfrak{z}\, d_{\mathfrak{z}}^2\mathfrak{S}}{\mathrm{Z}+\Delta\mathrm{Z}}.$$

Subtrahirt man diese Gleichungen von der dritten der Gleichungen (116), so erhält man:

(119)

$$\frac{\Delta X \cdot \frac{d_x \mathfrak{S}}{X} - \Delta \mathfrak{x}\, d_x^2 \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{y}\, d_x d_y \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{z}\, d_x d_z \mathfrak{S}}{X + \Delta X} =$$

$$= \frac{\Delta Y \cdot \frac{d_y \mathfrak{S}}{Y} - \Delta \mathfrak{x}\, d_x d_y \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{y}\, d_y^2 \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{z}\, d_y d_z \mathfrak{S}}{Y + \Delta Y} =$$

$$= \frac{\Delta Z \cdot \frac{d_z \mathfrak{S}}{Z} - \Delta \mathfrak{x}\, d_x d_z \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{y}\, d_y d_z \mathfrak{S} - \Delta \mathfrak{z}\, d_z^2 \mathfrak{S}}{Z + \Delta Z}.$$

Bezeichnet man jetzt durch R und $\mathfrak{r}$ die Radii vectores zu den Punkten *D* und *E*, und setzt:

(120)

$$X = UR, \quad Y = VR, \quad Z = WR,$$
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{v}\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{w}\mathfrak{r},$$

so wird die Höhe der Zone *SS′S″*, $(\lambda - \varrho)$, gleich sein der Projection der Linie *DS* auf der durch *D* gezogenen Normale, welche parallel mit dem Radius vector O*E* ist, folglich:

(121)

$$\lambda - \varrho = \mathfrak{u}\Delta X + \mathfrak{v}\Delta Y + \mathfrak{w}\Delta Z,$$

und ebenso die Höhe der Zone *VV′V″*:

(122)

$$\tau = U\Delta\mathfrak{x} + V\Delta\mathfrak{y} + W\Delta\mathfrak{z},$$

und folglich, wenn man die Gleichungen (120) berücksichtigt:

(123)

$$\mathfrak{r}(\lambda - \varrho) - R\tau = \mathfrak{x}\Delta X + \mathfrak{y}\Delta Y + \mathfrak{z}\Delta Z - X\Delta\mathfrak{x} - Y\Delta\mathfrak{y} - Z\Delta\mathfrak{z}.$$

Multiplicirt man jetzt die Zähler und Nenner der Brüche (119) respective mit $\Delta\mathfrak{x}$, $\Delta\mathfrak{y}$, $\Delta\mathfrak{z}$, und addirt die Zähler und Nenner unter sich, so wird man mit Rücksicht auf die Gleichungen (116), (117), (118), (123) erhalten:

$$\frac{\mathfrak{r}(\lambda - \varrho) - R\tau}{\Delta\mathfrak{x}(X + \Delta X) + \Delta\mathfrak{y}(Y + \Delta Y) + \Delta\mathfrak{z}(Z + \Delta Z)} \cdot \frac{d_x F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}{X}$$

und dieser Ausdruck soll nun jedem von den drei Brüchen (119) gleich sein, und folglich mit den Differenzen $\Delta\mathfrak{x}$, $\Delta\mathfrak{y}$, $\Delta\mathfrak{z}$, ΔX, ΔY, ΔZ verschwinden. Weil nun $\frac{d_x F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, t)}{X}$ im Allgemeinen nicht mit diesen Grössen verschwindet, so muss der Ausdruck:

(124)

$$\frac{\mathfrak{r}(\lambda - \varrho) - R\tau}{\Delta\mathfrak{x}(X + \Delta X) + \Delta\mathfrak{y}(Y + \Delta Y) + \Delta\mathfrak{z}(Z + \Delta Z)}$$

sehr klein sein. Nun ist aber wegen der Gleichungen (116), (120) und (121):

$$\Delta\mathfrak{x}\,(X+\Delta X)+\Delta\mathfrak{y}\,(Y+\Delta Y)+\Delta\mathfrak{z}\,(Z+\Delta Z)=$$

$$=(\mathfrak{x}+\Delta\mathfrak{x})(X+\Delta X)+(\mathfrak{y}+\Delta\mathfrak{y})(Y+\Delta Y)+(\mathfrak{z}+\Delta\mathfrak{z})(Z+\Delta Z)-$$

$$-\mathfrak{x}X-\mathfrak{y}Y-\mathfrak{z}Z-(\mathfrak{x}\Delta X+\mathfrak{y}\Delta X+\mathfrak{z}\Delta Z)=$$

$$=-(\mathfrak{x}\Delta X+\mathfrak{y}\Delta Y+\mathfrak{z}\Delta Z)$$

$$=-\mathfrak{r}\,(u\Delta X+v\Delta Y+w\Delta Z)=-\mathfrak{r}\,(\lambda-\varrho)$$

und der Bruch (124) reducirt sich folglich auf folgenden Ausdruck:

$$\frac{R}{\lambda-\varrho}\cdot\frac{\tau}{\mathfrak{r}}-1,$$

und weil dieses Verhältniss annäherungsweise gleich Null sein muss, so hat man:

$$\tau=\frac{\mathfrak{r}}{R}\,(\lambda-\varrho),$$

oder weil R von r sehr wenig verschieden ist:

(125)

$$\tau=\frac{\mathfrak{r}}{r}\,(\lambda-\varrho).$$

Angenommen jetzt, dass der tangirende Plan zum Punkte E der characteristischen Fläche diese nicht gleich schneidet, so wird die von der Kurve $VV'V''$ eingeschlossene Zone gleich sein dem Product von τ in der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser das geometrisehe Mittel zwischen den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der characteristischen Fläche im Punkte E sind. Diese beiden Krümmungshalbmesser variiren nun so wie die Coordinaten des Punktes E proportional mit der Zeit, und sind folglich dem Radius vector $\mathfrak{r}$ proportional. Ihr geometrisches Mittel wird folglich auch proportional mit diesem Radius vector sein, und wir können es folglich durch:

$$k\mathfrak{r}$$

vorstellen. Die von der Kurve $VV'V''$ eingeschlossene Zone wird folglich gleich

$$2\pi k\mathfrak{r}\;.\;\frac{\mathfrak{r}}{r}\,(\lambda-\varrho)$$

sein. Bezeichnet man jetzt durch δ den Winkel, welchen die Normale in E mit dem Radius vector OE macht, und beschreibt um E mit OE als Halbmesser eine Kugelfläche, so wird die Projection der Zone $VV'V''$ auf diese Kugelfläche gleich

$$\frac{2\pi k\mathfrak{r}^3\,(\lambda-\varrho)}{r}\cos\delta$$

sein, und die von $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ eingeschlossene Zone folglich gleich

$$\mathfrak{K} = 2\pi k \,.\, \frac{\lambda - \varrho}{r} \cos\delta$$

sein. Bezeichnet man jetzt durch $\mathfrak{P}$ den Theil von P, welcher Werthen von p und q entspricht, die Polarcoordinaten der Punkte auf die Zone $\mathfrak{K}$ vorstelle, so wird:

$$d_\varrho \mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi} \Theta d_\varrho \mathfrak{K}$$

und folglich, wenn man den Werth von $\mathfrak{K}$ substituirt:

$$d_\varrho \mathfrak{P} = -\frac{k}{2r} \Theta \cos\delta$$

und weil $\mathfrak{K}$ und folglich auch $\mathfrak{P}$ verschwindet, wenn $\varrho = \lambda$:

$$\mathfrak{P} = \int_\varrho^\lambda \frac{k}{2r} \Theta \cos\delta \, d\varrho.$$

Um hieraus den Werth von P zu finden, braucht man nur statt ϱ im Integrationszeichen $-\varepsilon$ zu setzen, folglich:

$$P = \int_{-\varepsilon}^\lambda \frac{k}{2r} \Theta \cos\delta \, d\varrho$$

oder weil:

$$\lambda = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z + st = \varrho' + st,$$

wo x, y, z die Coordinaten des Punktes A sind:

(126)

$$P = \int_{-\varepsilon}^{\varrho' + st} \frac{k}{2r} \Theta \cos\delta \, d\varrho.$$

Dieses in die Gleichung (115) eingesetzt giebt:

(127)

$$d_t^{2n-2}\omega = \mathcal{E} \frac{s^{2n-2}}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} \cdot \frac{k\cos\delta}{r} \int_{-\varepsilon}^{\varrho' + st} \varrho \Pi(\varrho) d\varrho,$$

wenn man zugleich den Werth von Θ substituirt. Hier bezeichnen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Cosinus der Winkel, welche der Radius vector zum Punkte E der characteristischen Fläche, oder die mit demselben parallelen Normale zum Punkte D der Wellenfläche mit den Coordinataxen bildet. Diese können abgeleitet werden aus den Gleichungen:

(128)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = 0$$

$$\frac{\mathfrak{u}}{d_x \mathfrak{F}(x, y, z, t)} = \frac{\mathfrak{v}}{d_y \mathfrak{F}(x, y, z, t)} = \frac{\mathfrak{w}}{d_z \mathfrak{F}(x, y, z, t)}$$

$$\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 = 1$$

und ihre Zeichen müssen so gewählt werden, dass sie der Gleichung

(113)

$$\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z > 0$$

Genüge leisten. Durch δ wird der Winkel bezeichnet, welchen die Normale in D mit dem Radius vector dieses Punktes macht, und man hat folglich:

$$\cos\delta = \frac{\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z}{r} = \frac{\varsigma'}{r}.$$

Durch k wird das Verhältniss zwischen dem mittleren Krümmungsradius des Punktes E in der characteristischen Fläche und dem Radius vector dieses Punktes bezeichnet. Um das Integral im zweiten Gliede der Gleichung (127) wegzuschaffen, kann man setzen:

$$\varrho \Pi(\varrho) = \mathfrak{F}(\varrho)$$

und in Bezug auf t differentiirt, so erhält man, weil $d_t \varrho = s$:

$$d_t^{2n-1}\omega = \mathcal{E}\frac{s^{2n-1}}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} \cdot \frac{k\cos\delta}{r} \int_{-\varepsilon}^{\varsigma' + st} f'(\varrho)\, d\varrho$$

oder:

(129)

$$d_t^{2n-1}\omega = \mathcal{E}\frac{s^{2n-1}(\varsigma' + st)\,\Pi(\varsigma' + st)}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} \cdot \frac{k\cos\delta}{r},$$

weil $f(-\varepsilon) = 0$.

Bezeichnet man jetzt durch $\varphi(t)$ die rechte Seite dieser Gleichung und setzt:

$$\psi(\mu) = \int_0^{\mu}\int_0^{\mu}\cdots\int_0^{\mu} \varphi(\mu)\, d\mu^{2n-2}$$

so wird:

$$\omega = \int_0^t \psi(\mu)\, d\mu.$$

Integrirt man hier durch partielle Integration, und bemerkt, dass $\psi(\mu)$ so wie seine $2n-3$ ersten Differentialen mit μ verschwinden, so erhält man:

$$\int_0^t \psi(\mu)\, d\mu = \int_0^t \frac{(t-\mu)^{2n-2}}{1.2.\ldots.(2n-2)} d\mu^{2n-2} . \psi(\mu)\, d\mu$$

oder:

$$\omega = \int_0^t \frac{(t-\mu)^{2n-2}}{1.2.3.\ldots.(2n-2)} . \varphi(\mu)\, d\mu$$

und wenn man den Werth von $\varphi(\mu)$ einsetzt:

(130)

$$\omega = \mathcal{E} \int_0^t \frac{(t-\mu)^{2n-2}}{1.2.3.\ldots.(2n-2)} . \frac{s^{2n-1}(\varsigma' + s\mu)\,\Pi(\varsigma' + s\mu)}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} . \frac{k \cos\delta}{r} d\mu.$$

§. 9. Ueber die Begrenzung der Wellen*).

Die innere Begrenzung der Wellen ist unter denselben Voraussetzungen wie im vorigen Paragraphen durch die Fläche [siehe (112)]:

(131)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t, -\varepsilon) = 0$$

bestimmt. Nimmt man nämlich an, der Punkt A, (x, y, z), läge innerhalb dieser Fläche, so könnte dieser Punkt nicht der Scheitel eines um die Fläche LMN (112) beschriebenen Kegels werden, wo ϱ zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ eingeschlossen ist. Das $2n-2$te Differential der principalen Function und folglich wegen der Gleichungen (25) auch diese Function selbst wird verschwinden, und es wird dann im Punkte A weder Verschiebung noch Geschwindigkeit stattfinden. Die Fläche (131) bildet folglich unter denselben Voraussetzungen wie im vorigen Paragraphen die innere Grenze der Wellen.

Liegt der Punkt A ausserhalb der Fläche:

(132)

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t, +\varepsilon) = 0,$$

so dass sein Abstand von der Wellenfläche grösser als ε ist, so giebt die Gleichung (127):

$$d_t^{2n-2}\omega = \mathcal{E} \frac{s^{2n-2}}{[F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, s)]_s} . \frac{k\cos\delta}{r} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varrho\,\Pi(\varrho)\, d\varrho = 0,$$

weil $\varrho\,\Pi(\varrho)$ eine ungerade Function von ϱ ist. Die Fläche (132) wird folglich die äussere Grenze der Wellen sein, und ausserhalb wird weder Verschiebung noch Geschwindigkeit stattfinden. —

*) Compte rendu Tome XIII. pag. 189—197, 494—497.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, der Werth von $d_t^{2n-1}\omega$ wäre anfänglich nur innerhalb einer sehr kleinen Kugelfläche merkbar; nehmen wir jetzt an, es wäre statt dessen nur innerhalb einer gewissen Fläche Q merkbar. Man braucht dann nur den Anfangswerth von $d_t^{2n-1}\omega$ in Theile zu zerlegen, deren jeder nur innerhalb einer sehr kleinen Kugelfläche bemerkbar ist. Um dann die innere und äussere Grenze der Wellen zu erhalten, braucht man nur die Fläche Q so zu bewegen, dass jeder ihrer Punkte eine gerade Linie beschreibt, gleich und parallel mit einem Radius vector OA, vom Anfangspunkte der Coordinaten O zu einem beliebigen Punkte A der Wellenfläche gezogen, und dass der Punkt O in diesen Punkt A fällt. Die innere und äussere Enveloppe der verschiedenen Stellungen, welche die Fläche Q auf diese Weise einnehmen wird, mit Hinsicht auf die verschiedenen Stellungen des Punktes A, werden dann die innere und äussere Begrenzung der Wellen. —

§. 10. Particuläre Integrale der Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen eines Systems von Molekülen*).

Die Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen eines Systems von Molekülen sind:

(14)

$$(L - d_t^2)\xi + R\upsilon + Q\zeta = 0,$$
$$R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta = 0,$$
$$Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta = 0.$$

Um diesen Gleichungen Genüge zu leisten, braucht man nur die Hauptvariabeln ξ, υ, ζ derselben Exponentialgrösse, deren Exponent eine lineäre Function von x, y, z, t ist, proportional zu setzen; folglich:

(133)

$$\xi = Ae^{ux+vy+wz-st}; \quad \upsilon = Be^{ux+vy+wz-st}; \quad \zeta = Ce^{ux+vy+wz-st}$$

wo u, v, w, s, A, B, C folgenden Gleichungen genügen müssen:

(134)

$$(\mathfrak{L} - s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C = 0,$$
$$\mathfrak{R}A + (\mathfrak{M} - s^2)B + \mathfrak{P}C = 0,$$
$$\mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N} - s^2)C = 0,$$

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 1—10.

wo die Werthe von $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ aus denen von L, M, N, P, Q, R, (12), hergeleitet werden, wenn man in diesen statt der Characteristiken d_x, d_y, d_z die Grössen u, v, w einsetzt. Setzt man folglich:

(134)

$$\mathfrak{G} = S\left[m f(r) \left(e^{ux+vy+wz} - 1 \right) \right],$$

$$\mathfrak{H} = S\left[\frac{m}{r} d_r f(r) \left(e^{ux+vy+wz} - 1 - (ux+vy+wz) - \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right) \right],$$

so werden:

(135)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G} + d_u^2 \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{G} + d_v^2 \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{G} + d_w^2 \mathfrak{H},$$
$$\mathfrak{P} = d_v d_w \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{Q} = d_u d_w \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{R} = d_u d_v \mathfrak{H}.$$

Eliminirt man jetzt die Factoren A, B, C aus den Gleichungen (133), so erhält man die folgende Gleichung:

(136)

$$S = (s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N}) - \mathfrak{P}^2(s^2-\mathfrak{L}) - \mathfrak{Q}^2(s^2-\mathfrak{M}) - \mathfrak{R}^2(s^2-\mathfrak{N}) - 2\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = 0.$$

Nimmt man jetzt an, s sei eine beliebige Wurzel dieser Gleichung, und bezeichnet durch α, β, γ willkührliche Constanten, so können die Gleichungen (133) so geschrieben werden:

(137)

$$(\mathfrak{L} - s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C = -\alpha S,$$
$$\mathfrak{R}A + (\mathfrak{M} - s^2)B + \mathfrak{P}C = -\beta S,$$
$$\mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N} - s^2)C = -\gamma S,$$

und hieraus erhält man:

$$A = \boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma,$$
$$B = \boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma,$$
$$C = \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{N}}\gamma,$$

oder:

(138)

$$\frac{A}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma} = \frac{B}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma} = \frac{C}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{N}}\gamma},$$

wo $\boldsymbol{\mathfrak{L}}, \boldsymbol{\mathfrak{M}}, \boldsymbol{\mathfrak{N}}, \boldsymbol{\mathfrak{P}}, \boldsymbol{\mathfrak{Q}}, \boldsymbol{\mathfrak{R}}$ durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

(139)

$$\boldsymbol{\mathfrak{L}} = (s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}^2, \quad \boldsymbol{\mathfrak{M}} = (s^2 - \mathfrak{L})(s^2 - \mathfrak{N}) - \mathfrak{Q}^2,$$
$$\boldsymbol{\mathfrak{N}} = (s^2 - \mathfrak{L})(s^2 - \mathfrak{M}) - \mathfrak{R}^2,$$
$$\boldsymbol{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}(s^2 - \mathfrak{L}) - \mathfrak{Q}\mathfrak{R}, \quad \boldsymbol{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}(s^2 - \mathfrak{M}) - \mathfrak{P}\mathfrak{R}, \quad \boldsymbol{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(s^2 - \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}\mathfrak{Q}.$$

Die Werthe von α, β, γ sind willkührlich; nimmt man an, zwei derselben seien gleich Null und der dritte Werth gleich der Einheit, so wird:

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{L}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}}, \text{ oder}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}}, \text{ oder}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{Q}},$$

und folglich, wenn man durch A_1, A_2, A_3 drei beliebige Constanten bezeichnet:

(140)

$$\xi = A_1 \mathfrak{L} e^{ux + vy + wz - st}, \quad \upsilon = A_1 \mathfrak{R} e^{ux + vy + wz - st},$$

$$\zeta = A_1 \mathfrak{Q} e^{ux + vy + wz - st}, \text{ oder:}$$

(140′)

$$\xi = A_2 \mathfrak{R} e^{ux + vy + wz - st}, \quad \upsilon = A_2 \mathfrak{M} e^{ux + vy + wz - st},$$

$$\zeta = A_2 \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st}, \text{ oder:}$$

(140″)

$$\xi = A_3 \mathfrak{Q} e^{ux + vy + wz - st}, \quad \upsilon = A_3 \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st},$$

$$\zeta = A_3 \mathfrak{N} e^{ux + vy + wz - st}.$$

§. 11. Particuläre Integrale der Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen zweier Systeme von Molekülen, die sich gegenseitig durchdringen*).

Die Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen zweier Systeme von Molekülen sind:

(21)

$$\begin{aligned}
(L - d_t^2)\xi + R\upsilon + Q\zeta + L_,\xi' + R_,\upsilon' + Q_,\zeta' &= 0,\\
R\xi + (M - d_t^2)\upsilon + P\zeta + R_,\xi' + M_,\upsilon' + P_,\zeta' &= 0,\\
Q\xi + P\upsilon + (N - d_t^2)\zeta + Q_,\xi' + P_,\upsilon' + N_,\zeta' &= 0,\\
{}_,L\xi + {}_,R\upsilon + {}_,Q\zeta + (L_{,,} - d_t^2)\xi' + R_{,,}\upsilon' + Q_{,,}\zeta' &= 0,\\
{}_,R\xi + {}_,M\upsilon + {}_,P\zeta + R_{,,}\xi' + (M_{,,} - d_t^2)\upsilon + P_{,,}\zeta' &= 0,\\
{}_,Q\xi + {}_,P\upsilon + {}_,N\zeta + Q_{,,}\xi' + P_{,,}\upsilon' + (N_{,,} - d_t^2)\zeta' &= 0.
\end{aligned}$$

Um diesen Gleichungen Genüge zu leisten, braucht man nur die Hauptvariabeln ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' derselben Exponentialgrösse, deren Exponent eine lineäre Function von x, y, z, t ist, proportional zu setzen; folglich:

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 42—48.

(141)

$$\xi = A e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon = B e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = C e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\xi' = A' e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon' = B' e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta' = C' e^{ux+vy+wz-st},$$

wo u, v, w, s, A, B, C, A', B', C' den folgenden Gleichungen Genüge leisten müssen:

(142)

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}-s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C + \mathfrak{L}_{,}A' + \mathfrak{R}_{,}B' + \mathfrak{Q}_{,}C' &= 0,\\
\mathfrak{R}A + (\mathfrak{M}-s^2)B + \mathfrak{P}C + \mathfrak{R}_{,}A' + \mathfrak{M}_{,}B' + \mathfrak{P}_{,}C' &= 0,\\
\mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N}-s^2)C + \mathfrak{Q}_{,}A' + \mathfrak{P}_{,}B' + \mathfrak{N}_{,}C' &= 0,\\
{}_{,}\mathfrak{L}A + {}_{,}\mathfrak{R}B + {}_{,}\mathfrak{Q}C + (\mathfrak{L}_{,,}-s^2)A' + \mathfrak{R}_{,,}B' + \mathfrak{Q}_{,,}C' &= 0,\\
{}_{,}\mathfrak{R}A + {}_{,}\mathfrak{M}B + {}_{,}\mathfrak{P}C + \mathfrak{R}_{,,}A' + (\mathfrak{M}_{,,}-s^2)B' + \mathfrak{P}_{,,}C' &= 0,\\
{}_{,}\mathfrak{Q}A + {}_{,}\mathfrak{P}B + {}_{,}\mathfrak{N}C + \mathfrak{Q}_{,,}A' + \mathfrak{P}_{,,}B' + (\mathfrak{N}''-s^2)C' &= 0,
\end{aligned}$$

wo die Werthe von $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \ldots \mathfrak{L}_{,}, \mathfrak{M}_{,}, \ldots {}_{,}\mathfrak{L}, {}_{,}\mathfrak{M}, \ldots \mathfrak{L}_{,,}, \mathfrak{M}_{,,}, \ldots$ aus denen von $L, M, \ldots L_{,}, M_{,}, \ldots {}_{,}L, {}_{,}M, \ldots L_{,,}, M_{,,}, \ldots$ (19) hergeleitet werden, wenn man in diesen statt der Characteristiken d_x, d_y, d_z die Grössen u, v, w einsetzt. Setzt man folglich:

(143)

$$\mathfrak{G} = S\left\{m f(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1\right)\right\} - S\left\{m' f_{,}(r)\right\},$$

$$\mathfrak{H} = S\left\{\frac{m}{r} d_r f(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1-(ux+vy+wz)-\frac{(ux+vy+wz)^2}{2}\right)\right\} - \\ - S\left\{\frac{m'}{r} d_r f_{,}(r) \frac{(ux+vy+wz)^2}{2}\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{,} = S\left\{m' f_{,}(r)\, e^{ux+vy+wz}\right\},$$

$$\mathfrak{H}_{,} = S\left\{\frac{m'}{r} d_r f_{,}(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1-(ux+vy+wz)\right)\right\},$$

$${}_{,}\mathfrak{G} = S\left\{m f_{,}(r)\, e^{ux+vy+wz}\right\},$$

$${}_{,}\mathfrak{H} = S\left\{\frac{m}{r} d_r f_{,}(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1-(ux+vy+wz)\right)\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{,,} = S\left\{m' f_{,,}(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1\right)\right\} - S\left\{m f_{,}(r)\right\},$$

$$\mathfrak{H}_{,,} = S\left\{\frac{m'}{r} d_r f_{,,}(r)\left(e^{ux+vy+wz}-1-(ux+vy+wz)-\frac{(ux+vy+wz)^2}{2}\right)\right\} - \\ - S\left\{\frac{m}{r} d_r f_{,}(r) \frac{(ux+vy+wz)^2}{2}\right\},$$

so werden:

(144)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L} = \mathfrak{G} + d_u^2\,\mathfrak{H}, && \mathfrak{M} = \mathfrak{G} + d_v^2\,\mathfrak{H}, && \mathfrak{N} = \mathfrak{G} + d_w^2\,\mathfrak{H},\\
&\mathfrak{P} = d_v d_w\,\mathfrak{H}, && \mathfrak{Q} = d_u d_w\,\mathfrak{H}, && \mathfrak{R} = d_u d_v\,\mathfrak{H},\\
&\mathfrak{L}_{,} = \mathfrak{G}_{,} + d_u^2\,\mathfrak{H}_{,}, && \mathfrak{M}_{,} = \mathfrak{G}_{,} + d_v^2\,\mathfrak{H}_{,}, && \mathfrak{N}_{,} = \mathfrak{G}_{,} + d_w^2\,\mathfrak{H}_{,},\\
&\mathfrak{P}_{,} = d_v d_w\,\mathfrak{H}_{,}, && \mathfrak{Q}_{,} = d_u d_w\,\mathfrak{H}_{,}, && \mathfrak{R}_{,} = d_u d_v\,\mathfrak{H}_{,},\\
&{}_{,}\mathfrak{L} = {}_{,}\mathfrak{G} + d_u^2\,{}_{,}\mathfrak{H}, && {}_{,}\mathfrak{M} = {}_{,}\mathfrak{G} + d_v^2\,{}_{,}\mathfrak{H}, && {}_{,}\mathfrak{N} = {}_{,}\mathfrak{G} + d_w^2\,{}_{,}\mathfrak{H},\\
&{}_{,}\mathfrak{P} = d_v d_w\,{}_{,}\mathfrak{H}, && {}_{,}\mathfrak{Q} = d_u d_w\,{}_{,}\mathfrak{H}, && {}_{,}\mathfrak{R} = d_u d_v\,{}_{,}\mathfrak{H},\\
&\mathfrak{L}_{,,} = \mathfrak{G}_{,,} + d_u^2\,\mathfrak{H}_{,,}, && \mathfrak{M}_{,,} = \mathfrak{G}_{,,} + d_v^2\,\mathfrak{H}_{,,}, && \mathfrak{N}_{,,} = \mathfrak{G}_{,,} + d_w^2\,\mathfrak{H}_{,,},\\
&\mathfrak{P}_{,,} = d_v d_w\,\mathfrak{H}_{,,}, && \mathfrak{Q}_{,,} = d_u d_w\,\mathfrak{H}_{,,}, && \mathfrak{R}_{,,} = d_u d_v\,\mathfrak{H}_{,,}. -
\end{aligned}$$

Eliminirt man jetzt die Factoren A, B, C, A', B', C' aus den Gleichungen (142), so erhält man die folgende Gleichung:

(145)

$$S = (s^2 - \mathfrak{L})(s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N})(s^2 - \mathfrak{P})(s^2 - \mathfrak{Q})(s^2 - \mathfrak{R}) - \text{etc.}\ldots = 0.$$

Nimmt man jetzt an, s sei eine beliebige Wurzel dieser Gleichung und bezeichnet durch $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sechs beliebige Constanten, so können die Gleichungen (142) auf folgende Weise geschrieben werden:

(146)

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{L} - s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C + \mathfrak{L}_{,}A' + \mathfrak{R}_{,}B' + \mathfrak{Q}_{,}C' = -\alpha S,\\
&\mathfrak{R}A + (\mathfrak{M} - s^2)B + \mathfrak{P}C + \mathfrak{R}_{,}A' + \mathfrak{M}_{,}B' + \mathfrak{P}_{,}C' = -\beta S,\\
&\mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N} - s^2)C + \mathfrak{Q}_{,}A' + \mathfrak{P}_{,}B' + \mathfrak{N}_{,}C' = -\gamma S,\\
&{}_{,}\mathfrak{L}A + {}_{,}\mathfrak{R}B + {}_{,}\mathfrak{Q}C + (\mathfrak{L}_{,,} - s^2)A' + \mathfrak{R}_{,,}B' + \mathfrak{Q}_{,,}C' = -\alpha' S,\\
&{}_{,}\mathfrak{R}B + {}_{,}\mathfrak{M}B + {}_{,}\mathfrak{P}C + \mathfrak{R}_{,,}A' + (\mathfrak{M}_{,,} - s^2)B' + \mathfrak{P}_{,,}C' = -\beta' S,\\
&{}_{,}\mathfrak{Q}A + {}_{,}\mathfrak{P}B + {}_{,}\mathfrak{N}C + \mathfrak{Q}_{,,}A' + \mathfrak{P}_{,,}B' + (\mathfrak{N}_{,,} - s^2)C' = -\gamma' S,
\end{aligned}$$

und hieraus erhält man:

$$\begin{aligned}
A &= \boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,}\gamma',\\
B &= \boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,}\gamma',\\
C &= \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{U}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{,}\gamma',\\
A' &= {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,,}\gamma',\\
B' &= {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,,}\gamma',\\
C' &= {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + {}_{,}\boldsymbol{\mathfrak{U}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{,,}\gamma',
\end{aligned}$$

oder:

(147)

$$\frac{A}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,}\gamma'} =$$

$$= \frac{B}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,}\gamma'} =$$

$$= \frac{C}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + \boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + \boldsymbol{\mathfrak{U}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{,}\gamma'} =$$

$$= \frac{A'}{{,}\boldsymbol{\mathfrak{L}}\alpha + {,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}\beta + {,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,,}\gamma'} =$$

$$= \frac{B'}{{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}\alpha + {,}\boldsymbol{\mathfrak{M}}\beta + {,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,,}\gamma'} =$$

$$= \frac{C'}{{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\alpha + {,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}\beta + {,}\boldsymbol{\mathfrak{N}}\gamma + \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,,}\alpha' + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,,}\beta' + \boldsymbol{\mathfrak{N}}_{,,}\gamma'},$$

wo $\boldsymbol{\mathfrak{L}}, \boldsymbol{\mathfrak{M}}, \ldots \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,}, \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,}, \ldots {,}\boldsymbol{\mathfrak{L}}, {,}\boldsymbol{\mathfrak{M}}, \ldots \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,,}, \boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,,} \ldots$ durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

(148)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathfrak{L}} &= -(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{M}} &= -(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{N}} &= -(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{P}} &= \mathfrak{P}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{Q}} &= \mathfrak{Q}(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{R}} &= \mathfrak{R}(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,} &= \mathfrak{L}(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,} &= \mathfrak{M}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{N}}_{,} &= \mathfrak{N}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,} &= \mathfrak{P}_{,}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,} &= \mathfrak{Q}_{,}(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,} &= \mathfrak{R}_{,}(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{L}} &= {,}\mathfrak{L}(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{M}} &= {,}\mathfrak{M}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{N}} &= {,}\mathfrak{N}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{P}} &= {,}\mathfrak{P}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}} &= {,}\mathfrak{Q}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}} &= {,}\mathfrak{R}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{,,} &= -(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{M}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{M}}_{,,} &= -(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{N}}_{,,} &= -(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) + \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{,,} &= \mathfrak{P}_{,,}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{L}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{,,} &= \mathfrak{Q}_{,,}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{M}_{,,}) - \ldots\\
\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{,,} &= \mathfrak{R}_{,,}(s^2-\mathfrak{L})(s^2-\mathfrak{M})(s^2-\mathfrak{N})(s^2-\mathfrak{N}_{,,}) - \ldots
\end{aligned}$$

Die Werthe von α, β, γ, α', β', γ' sind willkührlich; nimmt man an, fünf von ihnen seien gleich Null und der sechste gleich der Einheit, so wird:

$$\frac{B}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{R}}}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}},\quad \frac{C}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}},\quad \frac{A'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{L}}}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}},\quad \frac{B'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}},\quad \frac{C'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{L}}},\ \text{oder:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}},\quad \frac{C}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{P}}}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}},\quad \frac{A'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{R}}}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}},\quad \frac{B'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{M}}}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}},\quad \frac{C'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}},\ \text{oder:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{P}}}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}},\quad \frac{C}{A} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{N}}}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}},\quad \frac{A'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}},\quad \frac{B'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{P}}}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}},\quad \frac{C'}{A} = \frac{{,}\boldsymbol{\mathfrak{N}}}{\boldsymbol{\mathfrak{Q}}},\ \text{oder:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{N}_,}{\mathfrak{L}_,},\quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{O}_,}{\mathfrak{L}_,},\quad \frac{A'}{A} = \frac{\mathfrak{L}_{,,}}{\mathfrak{L}_,},\quad \frac{B'}{A} = \frac{\mathfrak{N}_{,,}}{\mathfrak{L}_,},\quad \frac{C'}{A} = \frac{\mathfrak{O}_{,,}}{\mathfrak{L}_,},\ \text{oder:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{M}_,}{\mathfrak{N}_,},\quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{P}_,}{\mathfrak{N}_,},\quad \frac{A'}{A} = \frac{\mathfrak{N}_{,,}}{\mathfrak{N}_,},\quad \frac{B'}{A} = \frac{\mathfrak{M}_{,,}}{\mathfrak{N}},\quad \frac{C'}{A} = \frac{\mathfrak{P}_{,,}}{\mathfrak{N}},\ \text{oder:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{P}_,}{\mathfrak{O}_,},\quad \frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{U}_,}{\mathfrak{O}_,},\quad \frac{A'}{A} = \frac{\mathfrak{O}_{,,}}{\mathfrak{O}_,},\quad \frac{B'}{A} = \frac{\mathfrak{P}_{,,}}{\mathfrak{O}_,},\quad \frac{C'}{A} = \frac{\mathfrak{U}_{,,}}{\mathfrak{O}_,},$$

und folglich werden, wenn man durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 sechs beliebige Constanten bezeichnet, die Verschiebungen ξ, υ, ζ, ξ' υ', ζ' durch eines der folgenden Systeme von Gleichungen ausgedrückt:

(149)

$$\xi = A_1 \mathfrak{L} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon = A_1 \mathfrak{N} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta = A_1 \mathfrak{O} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\xi' = A_{1,} \mathfrak{L} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon' = A_{1,} \mathfrak{N} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta' = A_{1,} \mathfrak{O} e^{ux + vy + wz - st},$$

(149)I

$$\xi = A_2 \mathfrak{N} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon = A_2 \mathfrak{M} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta = A_2 \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\xi' = A_{2,} \mathfrak{N} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon' = A_{2,} \mathfrak{M} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta' = A_{2,} \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st},$$

(149)II

$$\xi = A_3 \mathfrak{O} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon = A_3 \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta = A_3 \mathfrak{U} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\xi' = A_{3,} \mathfrak{O} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon' = A_{3,} \mathfrak{P} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta' = A_{3,} \mathfrak{U} e^{ux + vy + wz - st},$$

(149)III

$$\xi = A_4 \mathfrak{L}_, e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon' = A_4 \mathfrak{N}_, e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta = A_4 \mathfrak{O}_, e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\xi' = A_4 \mathfrak{L}_{,,} e^{ux + vy + wz - st},\quad \upsilon' = A_4 \mathfrak{N}_{,,} e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta' = A_4 \mathfrak{O}_{,,} e^{ux + vy + wz - st},$$

$$(149)^{IV}$$

$$\xi = A_5 \mathfrak{N}, e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon = A_5 \mathfrak{M}, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = A_5 \mathfrak{P}, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\xi' = A_5 \mathfrak{N},, e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon' = A_5 \mathfrak{M},, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta' = A_5 \mathfrak{P},, e^{ux+vy+wz-st},$$

$$(149)^{V}$$

$$\xi = A_6 \mathfrak{O}, e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon' = A_6 \mathfrak{P}, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = A_6 \mathfrak{N}, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\xi' = A_6 \mathfrak{O},, e^{ux+vy+wz-st}, \quad \upsilon' = A_6 \mathfrak{P},, e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta' = A_6 \mathfrak{N},, e^{ux+vy+wz-st}.$$

§. 12. Zusammensetzung der allgemeinen Integralen aus den particulären.

Die allgemeinen Integralen der Gleichungen der unendlich kleinen Bewegungen eines oder zweier Systeme von Molekülen, welche wir in den Gleichungen (30) und (35) gegeben haben, können als die Summe einer unendlichen Menge particulärer Integralen der Formen (140) und (149) angesehen werden. Betrachten wir nämlich den Fall zweier Systeme von Molekülen, so wird die Summe der verschiedenen particulären Werthe von ξ (149) werden:

$$\xi = (A_1 \mathfrak{L} + A_2 \mathfrak{N} + A_3 \mathfrak{O} + A_4 \mathfrak{L}, + A_5 \mathfrak{N}, + A_6 \mathfrak{O},)\, e^{ux+vy+wz-st},$$

wo s eine Wurzel der Gleichung:

$$(145)$$
$$S = F(u, v, w, s) = 0.$$

Addirt man nun wieder die den verschiedenen Werthen von s entsprechenden Werthe von ξ, jeden mit einem Coefficienten multiplicirt, so wird: *)

$$\xi = \mathcal{E}(A_1 \mathfrak{L} + A_2 \mathfrak{N} + A_3 \mathfrak{O} + A_4 \mathfrak{L}, + A_5 \mathfrak{N}, + A_6 \mathfrak{O},)\frac{e^{ux+vy+wz-st}}{[F(u,v,w,s)]_s} =$$
$$= \mathcal{E}(A_1 \mathfrak{L} + A_2 \mathfrak{N} + A_3 \mathfrak{O} + A_4 \mathfrak{L}, + A_5 \mathfrak{N}, + A_6 \mathfrak{O},)\frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)},$$

*) Siehe die Anmerkung pag. 106.

weil $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ etc. und F (u, v, w, s) alle gerade Functionen von s. Giebt man hier successive u, v, w alle mögliche Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ und addirt, so wird:

(150)

$$\xi = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_1\mathfrak{L} + A_2\mathfrak{N} + A_3\mathfrak{O} + A_4\mathfrak{L}_{,} + A_5\mathfrak{N}_{,} + A_6\mathfrak{O}_{,}) \cdot \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} \cdot du\, dv\, dw$$

Ebenso erhält man:

(151)

$$\upsilon = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_1\mathfrak{N} + A_2\mathfrak{M} + A_3\mathfrak{P} + A_4\mathfrak{N}_{,} + A_5\mathfrak{M}_{,} + A_6\mathfrak{P}_{,}) \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} \cdot du\, dv\, dw$$

$$\zeta = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_1\mathfrak{O} + A_2\mathfrak{P} + A_3\mathfrak{N} + A_4\mathfrak{O}_{,} + A_5\mathfrak{P}_{,} + A_6\mathfrak{N}_{,}) \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} du\, dv\, dw$$

$$\xi' = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_{1,}\mathfrak{L} + A_{2,}\mathfrak{N} + A_{3,}\mathfrak{O} + A_4\mathfrak{L}_{,,} + A_5\mathfrak{N}_{,,} + A_6\mathfrak{O}_{2}) \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} du\, dv\, dw,$$

$$\upsilon' = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_{1,}\mathfrak{N} + A_{2,}\mathfrak{M} + A_{3,}\mathfrak{P} + A_4\mathfrak{N}_{,,} + A_5\mathfrak{M}_{,,} + A_6\mathfrak{P}_{,,}) \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} du\, dv\, dw$$

$$\zeta' = \mathcal{E}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (A_{1,}\mathfrak{O} + A_{2,}\mathfrak{P} + A_{3,}\mathfrak{N} + A_4\mathfrak{O}_{,,} + A_5\mathfrak{P}_{,,} + A_6\mathfrak{N}_{,,}) \frac{e^{ux+vy+wz+st}}{[F(u,v,w,s)]_s} du\, dv\, dw$$

Will man jetzt, dass die Hauptvariabeln ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' und ihre Differentialen $d_t\xi$, $d_t\upsilon$, $d_t\zeta$, $d_t\xi'$, $d_t\upsilon'$, $d_t\zeta'$ für $t=0$ den folgenden Gleichungen Genüge leisten sollen:

(32)

$$\xi = \varphi(x,y,z); \quad \upsilon = \psi(x,y,z); \quad \zeta = \chi(x,y,z),$$

$$\xi' = \varphi'(x,y,z); \quad \upsilon' = \psi'(x,y,z); \quad \zeta' = \chi'(x,y,z),$$

$$d_t\xi = \Phi(x,y,z); \; d_t\upsilon = \Psi(x,y,z); \; d_t\zeta = X(x,y,z),$$

$$d_t\xi' = \Phi'(x,y,z); \; d_t\upsilon' = \Psi'(x,y,z); \; d_t\zeta' = X'(x,y,z),$$

so muss man offenbar, weil $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ etc. gerade Functionen von s sind und weil immer:

$$\mathcal{E}\frac{\mathfrak{F}(s^2)}{[F(s^2)]_s} = 0,$$

setzen:

$$(152)$$

$$A_1 = C_1 + C_1' s, \quad A_2 = C_2 + C_2' s, \quad A_3 = C_3 + C_3' s,$$
$$A_4 = C_4 + C_4' s, \quad A_5 = C_5 + C_5' s, \quad A_6 = C_6 + C_6' s,$$

wo C_1, C_1', C_2, C_2' .... unabhängig von s sind. Man erhält dann, weil die Grösse $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{M}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{N}_{\prime\prime}$ Function des $2n-2$ten Grades und die übrigen nur vom $2n-4$ten Grade in Bezug auf s sind, während $S = F(u, v, w, s)$ $2n$ten Grades ist, und weil folglich:

$$\mathcal{E}\frac{\mathfrak{L}}{[S]_s} = 0, \quad \mathcal{E}\frac{\mathfrak{M}}{[S]_s} = 0, \ldots\ldots\ldots \mathcal{E}\frac{\mathfrak{P}}{[S]_s} = 0, \ldots.$$

$$\mathcal{E}\frac{s\mathfrak{L}}{[S]_s} = -1, \quad \mathcal{E}\frac{s\mathfrak{M}}{[S]_s} = -1, \ldots\ldots \mathcal{E}\frac{s\mathfrak{P}}{[S]_s} = -1,$$

die Gleichungen:

$$\varphi(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_1' e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$\Phi(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$\psi(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_2' e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$\Psi(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_2 e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$\chi(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_3' e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$X(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_3 e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw,$$

$$\varphi'(x,y,z) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} C_4' e^{ux+vy+wz} du\,dv\,dw.$$

$$\Phi'(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_4\, e^{ux+vy+wz}\, du\, dv\, dw,$$

$$\psi'(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_5'\, e^{ux+vy+wz}\, du\, dv\, dw,$$

$$\Psi'(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_5\, e^{ux+vy+wz}\, du\, dv\, dw,$$

$$\chi'(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_6'\, e^{ux+vy+wz}\, du\, dv\, dw,$$

$$X'(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_6\, e^{ux+vy+wz}\, du\, dv\, dw.$$

Vergleicht man diese Formeln mit der Formel:

(41)

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiiiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \,.\, \omega(\lambda,\mu,\nu)\,.\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw$$

so sieht man, dass man machen muss:

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu}\, \Phi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_1' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu}\, \varphi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_2 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu}\, X(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_2' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu}\, \chi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_3 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu}\, \Psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_3' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \psi(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_4 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \Phi'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_4' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \varphi'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_5 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} X'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_5' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \chi'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_6 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \Psi'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$C_6' = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \psi'(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen (152) und die hierdurch erhaltenen Werthe von A_1, A_2 .... A_6 in den Gleichungen (150) und (151), so erhält man eben die Integralen (35), wenn man noch bemerkt, dass die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ etc. aus den characteristischen Functionen L, M .... (34) hervorgebracht werden, wenn man d_x, d_y, d_z mit u, v, w wechselt. —

§. 13. Einfache Bewegungen eines oder zweier Systeme von Molekülen *).

Die Integralen (133) und (141) werden einfache Integralen genannt. In diesen können die Werthe der verschiedenen Constanten:

$$u, v, w, A, B, C, A', B', C'$$

und folglich auch die Werthe der Hauptvariabeln:

$$\xi, \upsilon, \zeta, \xi', \upsilon', \zeta'$$

---

*) Cauchy Ex. d'An et de Ph. Math. Tome I. pag. 10—15 u. 48—52.

reell oder imaginär sein. Im ersten Falle werden die Gleichungen (133) und (141) die unendlich kleinen Verschiebungen der Molekülen in einer Bewegung, die im Verhältniss zur Constitution des einen oder der beiden gegebenen Systeme von Molekülen unendlich klein ist, vorstellen. Im zweiten Falle werden die reellen Theile der durch die Gleichungen (133) und (141) bestimmten Werthe der Hauptvariabeln noch den Differentialgleichungen (14) und (21) Genüge leisten, und diese reellen Theile werden dann augenscheinlich die unendlich kleinen Verschiebungen vorstellen. In jedem Falle wird die unendlich kleine Bewegung, welche diesen Werthen von ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' entspricht, eine einfache Bewegung genannt, und durch plane Wellen sich fortpflanzen. Die durch die Gleichungen (133) und (141) gegebenen Werthe von ξ, υ, ζ, ξ', υ', ζ' werden im ersten Falle die wirklichen Verschiebungen, im zweiten Falle die symbolischen Verschiebungen der Molekülen längs der drei Coordinataxen, und die Gleichungen (133) und (141) werden im letzten Falle die symbolischen Gleichungen der einfachen Bewegung genannt. Setzt man folglich:

(153)

$$\mathrm{u} = \mathrm{U} + u\sqrt{-1},\quad \mathrm{v} = \mathrm{V} + v\sqrt{-1},\quad \mathrm{w} = \mathrm{W} + w\sqrt{-1},\quad \mathrm{s} = \mathrm{S} + s\sqrt{-1},$$

$$A = \mathrm{a}e^{\lambda\sqrt{-1}},\quad B = \mathrm{b}e^{\mu\sqrt{-1}},\quad C = \mathrm{c}e^{\nu\sqrt{-1}},\quad A' = \mathrm{a}'e^{\lambda'\sqrt{-1}},$$

$$B' = \mathrm{b}'e^{\mu'\sqrt{-1}},\quad C' = \mathrm{c}'e^{\nu'\sqrt{-1}},$$

wo U, V, W, u, v, w, S, s, a, b, c, a', b', c', λ, μ, ν, λ', μ', ν' reelle Grössen bezeichnen, und wenn man noch der Abkürzung willen setzt:

(154)

$$\varrho = ux + vy + wz,\quad \mathrm{P} = \mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z,$$

so werden die reellen Theile der Gleichungen (141):

(155)

$$\xi = \mathrm{a}e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \lambda),$$

$$\upsilon = \mathrm{b}e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \mu),$$

$$\zeta = \mathrm{c}e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \nu),$$

$$\xi' = \mathrm{a}'e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \lambda'),$$

$$\upsilon' = \mathrm{b}'e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \mu'),$$

$$\zeta' = \mathrm{c}'e^{\mathrm{P}-\mathrm{S}t}\cos(\varrho - st + \nu').$$

Aus den ersten drei Gleichungen erhält man, wenn λ, μ, ν gleich sind:

(156)

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\upsilon}{b} = \frac{\zeta}{c},$$

wenn λ, μ, ν ungleich sind, in Folge der bekannten Formeln:

$$\cos\alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos\beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0,$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\beta \cos\gamma \cos(\beta - \gamma) = \sin^2(\beta - \gamma),$$

welche stattfinden für beliebige Werthe von α, β, γ, und wenn man in diesen Formeln setzt:

$$\alpha = \varrho - st + \lambda, \quad \beta = \varrho - st + \mu, \quad \gamma = \varrho - st + \nu:$$

(157)

$$\frac{\xi}{a}\sin(\mu - \nu) + \frac{\upsilon}{b}\sin(\nu - \lambda) + \frac{\zeta}{c}\sin(\lambda - \mu) = 0,$$
$$\left(\frac{\upsilon}{b}\right)^2 - 2\frac{\upsilon\zeta}{bc}\cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = e^{2P - 2St}\sin^2(\mu - \nu).$$

Ebenso erhält man aus den letzten drei Gleichungen (155), wenn λ', μ', ν' gleich sind:

(158)

$$\frac{\xi'}{a'} = \frac{\upsilon'}{b'} = \frac{\zeta'}{c'},$$

wenn λ', μ', ν' ungleich sind:

(159)

$$\frac{\xi'}{a'}\sin(\mu' - \nu') + \frac{\upsilon'}{b'}\sin(\nu' - \lambda') + \frac{\zeta'}{c'}\sin(\lambda' - \mu') = 0,$$
$$\left(\frac{\upsilon'}{b'}\right)^2 - \frac{2\upsilon'\zeta'}{b'c'}\cos(\mu' - \nu') + \left(\frac{\zeta'}{c'}\right)^2 = e^{2P - 2St}\sin^2(\mu' - \nu').$$

Die von jeder Molekūle des ersten oder zweiten Systems von Molekülen beschriebene Linie wird folglich immer eine durch die Gleichungen (156) und (158) ausgedrückte gerade Linie oder eine durch die Gleichungen (157) und (159) ausgedrückte Ellipse sein. Diese Ellipse kann sich auch auf einen Zirkel reduciren. Der unveränderliche Plan, mit welchem diese Ellipse immer parallel verbleibt, ist für das erste System von Molekülen durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

(160)

$$\frac{x}{a}\sin(\mu - \nu) + \frac{y}{b}\sin(\nu - \lambda) + \frac{z}{c}\sin(\lambda - \mu) = 0,$$

und für das zweite System durch die Gleichung:

(161)

$$\frac{x'}{a'}\sin(\mu' - \nu') + \frac{y'}{b'}\sin(\nu' - \lambda') + \frac{z'}{c'}\sin(\lambda' - \mu') = 0.$$

Um den am Ende der Zeit t durch den Radius vector der ersten Ellipse beschriebenen Sector zu finden, braucht man nur zu bemerken, dass die Projection dieser Ellipse auf den Plan (υ, ζ) durch die letzte der Gleichungen (157) gegeben ist; die Projection dieser Ellipse auf den Plan (υ, ζ) wird folglich gleich sein: *)

$$\frac{1}{2}\int_0^t (\zeta d_t \upsilon - \upsilon d_t \zeta)\, dt.$$

Nun ist aber wegen der Gleichungen (155):

$$\zeta d_t \upsilon = -S\zeta\upsilon + s\zeta\upsilon \tan(\varrho - st + \mu),$$
$$\upsilon d_t \zeta = -S\zeta\upsilon + s\zeta\upsilon \tan(\varrho - st + \nu),$$

folglich:

(162)

$$\frac{1}{2}\int_0^t (\zeta d_t\upsilon - \upsilon d_t\zeta) dt = \frac{1}{2} s \int_0^t \upsilon\zeta [\tan(\varrho - st + \mu) - \tan(\varrho - st + \nu)] dt =$$
$$= \frac{1}{2} s b c e^{2P} \sin(\mu - \nu) \int_0^t e^{-2St} dt =$$
$$= \frac{s}{4S} . b c e^{2P} \sin(\mu - \nu)\left(1 - e^{-2St}\right).$$

Dividirt man diese Projection mit dem Cosinus der Winkel, welche den Plan der Ellipse mit dem Plane (υ, ζ) machen, so erhält man den gesuchten Sector. Aus der ersten der Gleichungen (157) sieht man aber, dass der Cosinus dieser Winkel ist:

$$\frac{b c \sin(\mu - \nu)}{\sqrt{[b^2 c^2 \sin^2(\mu - \nu) + a^2 c^2 \sin^2(\nu - \lambda) + a^2 b^2 \sin^2(\lambda - \mu)]}},$$

folglich wird der gesuchte Sector gleich:

(163)

$$\frac{s}{4S} e^{2P}\left(1 - e^{-2St}\right)\sqrt{[b^2 c^2 \sin^2(\mu - \nu) + a^2 c^2 \sin^2(\nu - \lambda) + a^2 b^2 \sin^2(\lambda - \mu)]}.$$

Ebenso wird der am Ende der Zeit t vom Radius vector der zweiten Ellipse beschriebene Sector gleich:

(164)

$$\frac{s}{S} e^{2P}\left(1 - e^{-2St}\right)\sqrt{[b'^2 c'^2 \sin^2(\mu' - \nu') + a'^2 c'^2 \sin^2(\lambda' - \nu') + a'^2 b'^2 \sin^2(\lambda' - \mu')]}.$$

Das Verhältniss zwischen diesen beiden Sectoren wird folglich unabhängig von t, x, y, z sein, und folglich dasselbe verbleiben in jedem Augenblick, so wie in jedem Punkte des Raumes. — Wenn

*) Moigno Leçons de calcul différentiel pag. 285.

S verschwindet, d. i. wenn die Verschiebungen nicht mit der Zeit abnehmen, so sind diese beiden Sectoren der Zeit proportional, da man dann hat:

$$\lim\left(\frac{1-e^{-2St}}{2S}\right) = t.$$

Bezeichnet man durch:

$$\alpha, \beta, \gamma$$

die Cosinus der drei Winkel, welche eine feste Axe mit den positiven Coordinataxen bildet, und nennt ϑ und ϑ' die Verschiebungen parallel mit dieser festen Axe, so werden:

(165)

$$\vartheta = \alpha\xi + \beta\upsilon + \gamma\zeta, \quad \vartheta' = \alpha\xi' + \beta\upsilon' + \gamma\zeta',$$

und folglich, wenn man um abzukürzen setzt:

$$\begin{aligned} a\alpha\cos\lambda + b\beta\cos\mu + c\gamma\cos\nu &= h\cos p, \\ a\alpha\sin\lambda + b\beta\sin\mu + c\gamma\sin\nu &= h\sin p, \\ a'\alpha\cos\lambda' + b'\beta'\cos\mu + c'\gamma'\cos\nu &= h'\cos p', \\ a'\alpha\sin\lambda' + b'\beta'\sin\mu + c'\gamma'\sin\nu &= h'\sin p': \end{aligned}$$

(166)

$$\begin{aligned} \vartheta &= he^{P-St}\cos(\varrho - st + p), \\ \vartheta' &= h'e^{P-St}\cos(\varrho - st + p'). \end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen werden die Verschiebungen einer Moleküle längs einer beliebigen festen Axe verschwinden:

1° in einem gegebenen Augenblicke in einer Reihe von Plänen, die dem durch die Gleichung:

(167)

$$\varrho = ux + vy + wz = 0$$

bezeichneten Plan parallel sind, und der Abstand zwischen zwei auf einander folgenden Plänen wird die Hälfte des Abstandes:

(168)

$$l = \frac{2\pi}{k}$$

sein, wo

(169)

$$k = \sqrt{[u^2 + v^2 + w^2]},$$

2° für eine gegebene Moleküle in Augenblicken, deren Unterschied die Hälfte des Zeitintervalls:

(170)

$$T = \frac{2\pi}{s}$$

ist.

Dieser Abstand l und diese Intervalle T, welche die Dicke einer planen Welle und die Dauer einer Molekulärvibration bezeichnen, sind folglich dieselben für beide Systeme von Molekülen, so wie der unveränderliche Plan (167), mit welchem die Pläne aller Wellen parallel sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Ω, welche durch die Formel:

(171)

$$\Omega = \frac{l}{T} = \frac{s}{k}$$

bestimmt wird, ist auch gemeinschaftlich für beide Systeme, so wie auch die Exponentialgrösse:

$$e^{P - St},$$

welche der Modul der einfachen Bewegung genannt, und das Binomium:

$$\varrho - st,$$

welches das Argument der einfachen Bewegung genannt wird. Die Ausdrücke:

$$\frac{\varrho + p}{k}, \quad \frac{\varrho + p'}{k}$$

werden die Phasen der einfachen Bewegung des respectiven Systems von Molekülen genannt. In Folge der Gleichungen (166) werden die grössten Abstände der Schwingungen zu beiden Seiten oder die Amplituden, parallel mit einer festen Axe gemessen, im ersten Systeme gleich sein:

$$2he^{P - St},$$

und im zweiten Systeme:

$$2h'e^{P - St}.$$

Diese Amplitude ist folglich im Allgemeinen verschieden in den beiden Systemen, so wie die Grössen p, p′, welche die Winkelparameter der festen Axe genannt werden. Das Verhältniss der Amplituden zweier correspondirenden Molekülen beider Systeme $\frac{h'}{h}$ wird dasselbe überall und zu jeder Zeit sein. Wenn P und S Null sind, so werden die Amplituden der Schwingungen 2h und 2h′ und folglich constant. Die Bewegung wird ferner für einen

unendlichen Werth von t erlöschen, wenn S nicht Null ist, so wie auch für einen unendlichen negativen Werth von P. Wenn P negativ verbleibt, werden auch die Amplituden der Schwingungen in einer geometrischen Progression abnehmen mit dem Modul e^{P-St}, während der Abstand vom Plane:

(172)

$$P = Ux + Vy + Wz = 0$$

in einer arithmetischen Reihe zunimmt.

Man wird folglich im Allgemeinen für jedes der zwei Systeme drei unveränderliche Pläne haben, nämlich: *a*) den Plan (160) und (161), welcher parallel mit der von der Moleküle beschriebenen Kurve ist, und welcher im Allgemeinen nicht gemeinschaftlich für beide Systeme sein wird; *b*) den Plan (167), welcher mit dem Wellenplane parallel ist; *c*) den Plan (172), mit welchem jeder Plan, wo die Molekülen sich befinden, welche dieselbe Amplitude haben, parallel ist. Die zwei letzten Pläne sind gemeinschaftlich für beide Systeme von Molekülen.

Setzt man die halbe Amplitude:

(173)

$$h e^{P-St} = \alpha, \quad h' e^{P-St} = \alpha'$$

und ferner die Phase:

(174)

$$\frac{\varrho + p}{k} = \varphi, \quad \frac{\varrho + p'}{k} = \varphi',$$

so werden die Gleichungen (166) in die folgenden verwandelt:

(175)

$$\vartheta = \alpha \cos\left\{2\pi\left(\frac{\varphi}{l} - \frac{t}{T}\right)\right\} = \alpha \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\varphi}{\Omega} - t\right)\right\},$$

$$\vartheta' = \alpha' \cos\left\{2\pi\left(\frac{\varphi'}{l} - \frac{t}{T}\right)\right\} = \alpha' \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\varphi'}{\Omega} - t\right)\right\}.$$

Die Geschwindigkeiten längs einer festen Axe werden zur Zeit t:

(176)

$$v = \frac{2\pi\alpha}{T} \sin\left\{2\pi\left(\frac{\varphi}{l} - \frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{2\pi\alpha}{T} \sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\varphi}{\Omega} - t\right)\right\},$$

$$v' = \frac{2\pi\alpha'}{T} \sin\left\{2\pi\left(\frac{\varphi'}{l} - \frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{2\pi\alpha}{T} \sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\varphi'}{\Omega} - t\right)\right\}.$$

Unter einer dieser Formen werden gewöhnlich die Verschiebungen und Geschwindigkeiten in den physikalischen Lehrbüchern dargestellt.

§. 14. Polarisation der unendlich kleinen Bewegungen.

Die im vorigen Paragraphen betrachteten einfachen Bewegungen werden polarisirte Bewegungen genannt, und zwar lineär, circulär oder elliptisch polarisirte, je nachdem die Molekülen gerade Linien, Ellipsen oder Cirkel beschreiben. Die allgemeinen Bewegungen, die durch die allgemeinen Integralen (30) und (35) gegeben sind, kann man sich, wie aus dem §. 12. erhellt, dadurch hervorgebracht denken, dass in demselben Augenblicke eine Moleküle alle möglichen Formen der einfachen Bewegungen ausführen soll. Die Schwingungen werden dann im Allgemeinen alle Punkte in der Nähe des Gleichgewichtpunktes durchlaufen, und wenn die Amplituden in jeder Richtung gleich sind, werden diese Bewegungen deswegen unpolarisirte genannt.

Die einfachen Bewegungen finden, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, in einem Plane Statt, welcher für das erste System von Molekülen dem Plane (160) parallel ist. Wählt man jetzt das Coordinatensystem so, dass einer der Coordinatpläne, z. B. der Plan (xy), diesem parallel wäre, und dass die Coordinataxen der x und y den Axen der beschriebenen Ellipse parallel wären, so wird:

(177)

$$\xi = Ae^{P-St}\cos\left\{2\pi\left(\frac{\varphi}{l}-\frac{t}{T}\right)\right\},$$

$$\upsilon = Be^{P-St}\cos\left\{2\pi\left(\frac{\varphi+l\frac{\pi}{2}}{l}-\frac{t}{T}\right)\right\},$$

und die Gleichung der beschriebenen Ellipse wird:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^2+\left(\frac{\upsilon}{B}\right)^2 = e^{2P-2St},$$

welche ein Cirkel wird, wenn:

$$A = B.$$

Eine elliptisch polarisirte Bewegung kann man sich folglich zusammengesetzt denken aus zwei rechtwinklig unter einander linearpolarisirten Bewegungen, deren Phasen um $l.\frac{\pi}{2}$ differiren, und deren Amplituden im Allgemeinen verschieden sind; nur wenn die Bewegung circular-polarisirt ist, sind die Amplituden gleich.

Funfzehnter Abschnitt.

Literatur des Magnetismus und der Elektricität.

I. Elektromagnetismus.

Hand- und Lehrbücher.

Ampère, récueil d'observations électro-dynamiques contenant divers mémoires, notices, extraits de lettres ou d'ouvrages periodiques sur les sciences, relatifs à l'action mutuelle de deux courants électriques et un aimant ou le globe terrestre, et à celle de deux aimans l'un sur l'autre. Paris 1822. 8. 360 S.

Ampère, Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques, pour servir de supplément à son récueil d'observations électro-dynamiques et au manuel d'électricité dynamique par M. Demonferrand. Paris 1824. 8.

Ampère, Exposé méthodique des phénomènes électro-dynamiques et des lois de ces phénomènes. Paris 1824. 8. (Journ. de ph. 95. p. 248—257.)

Ampère, Théorie des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience. Paris 1826. 4. 226 S.

Demonferrand, manuel d'électricité dynamique. Paris 1823. 8. übers. v. Fechner. Leipzig 1824. 8. (Handbuch der dynamischen Elektricität.)

Babinet, exposé des nouvelles découvertes sur l'électricité et le magnetisme par Mr. Oersted, Arago, Ampère, Davy, Biot, Erman, Schweigger, de la Rive. Paris 1822. 8. 91 S. (im Supplement v. Riffault's Traité de Chimie par Thomson).

Darstellung der neuen Entdeckungen über die Elektricität und den Magnetismus von Oersted durch Ampère und Babinet. Aus dem Franz. Leipzig 1822. 8. 118. S. (Uebersetzung des vorigen Werkes von Thieme.)

de la Rive, recherches sur le mode de distribution de l'électricité dynamique dans les corps, qui lui servent de conducteurs. Génève 1825. 8.

Fechner, Elementarlehrbuch des Elektromagnetismus nebst Beschreibung der hauptsächlichsten elektromagnetischen Apparate. Leipzig 1830. 8. 157 S.

Pohl, der Elektromagnetismus theoretisch - praktisch dargestellt. Berlin 1830. 8. 1 Theil.

Pfaff, der Elektro-Magnetismus, eine historisch-kritische Darstellung der bisherigen Entdeckungen auf dem Gebiete desselben, nebst eigenthümlichen Versuchen. Hamburg 1824. 8. 288 S.

Muncke, Elektromagnetismus. Artikel des neuen Gehlerschen Wörterbuchs.

Faraday, a historical sketch of electromagnetism. Ann. of Phil. 2. p. 200. 290. 3. p. 107. J. 1821. 1822.

Barlow, Electromagnetism. Artikel d. Encyclopaedia Metropolitana. 40. S. 4.

Roget, Electromagnetism. Artikel der Library for the diffusion of useful. Knowledge. 100 S. 8.

Sturgeon, recent experimental researches in electromagnetism, galvanism etc. London 1830. 8.

Watkins, a popular sketch of electro-magnetism or electro-dynamics, with outlines of electricity and magnetism. 8. London 1832.

Farrar, elements of electricity, magnetism and electro-magnetism. Cambridge. N. A. 1826.

Nobili, questioni sul magnetismo. Modena 1838. 8.

Nobili, novi trattati sopra il calorico, l'elettricita e il magnetismo. Modena 1838. 401 S.

Nobili, memorie ed osservazioni edite et inedite colla descrizione ed analisi de suoi apparati ed instrumente. Firenze 1834. 2 vol. 8.

Zantedeschi, relazione storico-critica sperimentale nell' elettromagnetismo. Venezia 1840. 8. 56 S.

Besondere Schriften.

Schrader, dissertatio medico - physico de electromagnetismo. Halae 1821. 8.

Kastner, observationes de electromagnetismo. Erlang. 1821.

Burdach, Bericht von der anatomischen Anstalt zu Königsberg. Königsberg 1822.

Dulk, über Elektromagnetismus. Königsberg. 54 S.

Theorien des Elektromagnetismus.

Oersted, Betrachtungen über den Elektromagnetismus. Schweigg Journ. 32. p. 199., 33. p. 123. (Bewegung der Elektricität in Schraubenlinien.

Prechtl, über die wahre Beschaffenheit des magnetischen Zustandes des Schliessungsdrathes in der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 67. p. 259. (Der Schliessungsdraht, ein Transversalmagnet mit mehrfacher Polarität.)

Erman, Umrisse zu den physischen Verhältnissen des von Oersted entdeckten elektrochemischen Magnetismus. Berlin 1821. 8. 112 S. Gilb. Ann. 67. p. 382. (Diagonaloide Polarisation.)

Berzelius, lettre sur l'état magnétique des corps, qui transmettent un courant d'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. 16. p. 113. (Vier Pole.)

Althauss, Versuche über den Elektromagnetismus, nebst einer kurzen Prüfung der Theorie des Hrn. Ampère. Heidelberg 1801. 37 S. (Dieselbe Ansicht.)

Muncke, Versuche über den Elektromagnetismus, zur Begründung einer genügenden Erklärung desselben. Gilb. Ann. 70. p. 141., 71. p. 20. (Schliessungsdraht doppelt transversal.)

Raschig, Versuche zur Prüfung von Munckes Erklärung des Elektromagnetismus. Gilb. Ann. 71. p. 39.

Kries, über Munckes Ansicht. ib. 71. p. 85.

Gilbert, über Munckes Ansicht. ib. 71. p. 64.

Faraday, on electromagnetic motions and the theory of electromagnetism. Roy. Inst. 1821. Sept. (Die Hälfte des Magnets sucht um den Leiter zu kreisen.)

Seebeck, über den Magnetismus der galvanischen Kette. Berlin 1822. 4. 58 S. (Der Draht ist circumpolar.)

Pohl, Versuche und Bemerkungen über den Zusammenhang des Magnetismus mit der Elektricität und dem Chemismus. Gilb. Ann. 69. p. 171. u. 71. p. 147. (Dieselbe Ansicht.)

Biot, sur l'aimantation inprimée aux métaux par l'électricité en mouvement. Journal des Savans. 1821.

Mathematische Theorien.

Barlow, an essay on magnetic attractions and on the laws of terrestrial and electromagnetism. London 1823. (Princip: every particle of the galvanic fluid in the conducting wire acts on every particle of the magnetic fluid in a magnetic needle, with a force varying inversely as the square of the distance, but the action is a tangential force which has a tendency to place the poles of either fluid at right angles to those of the other; whereby a magnetic particle, supposing it under the influence of the wire only, would always place itself at right angles to the line let fall from it perpendicular to the wire, and to the direction of the wire at that point.)

Ampère, mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques. Mém. de l'Acad. de Par. VI. 1823. p. 175.

Ampère, mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaiques. 10. Jan. 1822. Ann. de Ch. et de Ph. 20. p. 398—419.

Ampère, récueil. p. 207.

Ampère, note sur l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur voltaique. Ann. de Ch. et de Ph. 37. p. 113.

Savary, mémoire sur l'application de calcul aux phénomènes électriques. Paris 1823. (Extrait, Ann. de Ch. et de Ph. 22. p. 91.)

Guérin, action mutuelle des fils conducteurs de courants électriques. 8. Paris 1828.

Liouville, démonstration d'un théorème d'électricité dynamique. Ann. de Ch. et de Ph. 41. p. 415. (L'action mutuelle de deux éléments voltaiques est dirigée suivant la droite qui joint leurs milieux.)

Besondre elektromagnetische Erscheinungen.

A. Wirkung des Schliessungsdrathes auf Magnete.

Oersted, experimenta circa efficaciam conflictus electrici in acum magneticam. Hafniae 21. Juni 1820. Gilb. Ann. 66. p. 295. (Entdeckung des Gebietes.)

Oersted, expérience électromagnetique. Ann. de Ch. et de Ph. 22. p, 201. (Die Wirkung des Schliessungsdrahtes bleibt dieselbe beim Drehen um seine Achse.)

1) Abnahme mit der Entfernung.

Biot, note sur le magnetisme de la pile de Volta. Ann. de Ch. et de Ph. 15. p. 222. Gilb. Ann. 66. p. 392.

Biot et Savart, sur la mesure de l'action exercée à distance sur une particule de magnétisme par un fil conjonctif. Journ. de ph. 91. p. 151. (Abnahme im Verhältniss der Entfernung.)

Seebeck, über den Magnetismus der galvanischen Kette. Abh. der Berl. Akad. 1820. 21. p. 289. (Die Gleichgewichtsgrenze der Wirkung zweier parallelen, im magnetischen Meridian lothrecht übereinander entgegengesetzt fliessender Ströme auf eine Magnetnadel ausserhalb ist eine Hyperbel.)

Hansteen, über einen Versuch des Dr. Seebeck und über das Gesetz der elektromagnetischen Kraft. Gilb. Ann. 70. p. 175. (Abnahme im Verhältniss der Entfernung.)

Schmidt, Beschreibung einer einfach eingerichteten astatischen Magnetnadel und einiger damit angestellter Versuche, das Gesetz der elektromagnetischen Anziehungen und Abstossungen betreffend. Gilb. Annalen. 70. p. 243. (Dasselbe Gesetz abgeleitet aus Versuchen von

Bechstein, Versuche über die Einwirkung der galvanischen Elektricität auf die Magnetnadel. Gilb. Ann. 67. p. 371. (Wirkung des Schliessungsdrahtes unter verschiedenen Winkeln. Wirkung eines gegen den Meridian geneigten Drahtes.)

Schmidt, Gesetze der Anziehung eines galvanisch-elektrischen Stroms und eines Prechtlschen Transversalmagneten auf die Magnetnadel, abgeleitet aus der Anziehung der einzelnen Punkte und Vergleichung mit der Erfahrung. G. A. 71. p. 387.

Pouillet, condition d'équilibre d'une aiguille aimantée soumise à l'action d'un courant rectiligne indéfini. Elémens de physique 2. éd. I. p. 247.

2) Wirkung eines lothrechten Schliessungsdrahtes auf den Magnet.

Faraday, mémoire sur les mouvements électromagnetiques et la théorie du magnetisme avec des notes par Savary et Ampère.

Ann. de Ch. et de Ph. 18. p. 337—379. Gilb. Ann. 71. p. 124.

Pfaff, über das verschiedene Verhalten verschiedener Stellen einer und derselben Hälfte einer Magnetnadel im elektromagnetischen Conflicte. Gilb. Ann. 74. p. 249.

Poggendorff in Okens Isis. 1821. p. 690.

3) Wirkung eines Magneten auf den Schliessungsdraht.

Ampère, note sur un appareil à l'aide duquel on peut verifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaique. Ann. de Ch. et de Ph. 18. p. 88.

de la Rive, zwei kleine elektrisch-magnetische Apparate zum Anstellen der Ampèreschen Versuche. Gilb. Ann. 69. p. 81. (Schwimmende Kette.)

Raschig, einfachste Darstellung eines Magneten durch einen galvanisch-elektrischen Strom. Gilb. Ann. 69. p. 206. (Aufhängen der Kette an Seide.)

Erman, Umrisse zu den physischen Verhältnissen des elektrochemischen Magnetismus.

4) Wirkung der Erde auf den Schliessungsdraht.

Ampère, mémoire sur l'action, exercée sur un courant électrique par un autre courant, le globe terrestre et un aimant. Ann. de Ch. et de Ph. 15. p. 188.

de la Rive, mémoire sur l'action, qu'exerce le globe terrestre sur une portion mobile du circuit voltaique. Bibl. univ. 21. p. 29. Ann. de Ch. et de Ph. 21. p. 24.

Ampère, addition au mémoire précédent. Ann. de Ch. et de Ph. 21. p. 48.

Steffens, Versuch zur Darstellung des Verhältnisses des Elektromagnetismus zum Erdmagnetismus. Kastn. Arch. 7. p. 273.

Pohl, zur Lehre vom Elektromagnetismus. Kastn. Arch. 9. p. 1., 11. p. 161.

Pohl, Versuche über die Einwirkung des Erdmagnetismus auf bewegliche Elektromagnete (Leiter). Gilb. Ann. 74. p. 389. und 75. p. 269.

Pohl, Uebersicht der Verhandlungen der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. 1841. p. 85.

B. Wirkung zweier Schliessungsdrähte auf einander.

Ampère, de l'action mutuelle de deux courants électriques. §. 1. Ann. de Ch. et de Ph. 15. p. 57—76., 170—218. Gilb. Ann. 67. p. 113. 225. (Gleichfliessende Ströme ziehen einander an, ungleichfliessende stossen einander ab.)

Apparate dazu.

Notes sur quelques appareils propres à simplifier la démonstration des phénomènes électro-dynamiques. Ann. de Ch. et de Ph. 57. p. 204.

Roget, Electromagnetism. §. 173. (Verkürzung eines spiralförmigen Schliessungsdrahtes durch gegenseitige Anziehuug seiner Windungen.)

Barlow, Electromagnetism. Fig. 63.

Wirkung der aufeinderfolgenden Theile eines Stromes.

Ampère, théorie des phénomènes électro-dynamiques. p. 39.

Lenz, über eine Erscheinung, die an einer grossen Wollaston-schen Batterie beobachtet wurde. Pogg. Ann. 47. p. 46.

C. Rotationen.

Wollaston, Phil. Trans. 1823. p. 158. (Andeutung derselben.)

Faraday, on electromagnetic motions and the theory of magnetism. Roy. Inst. 1821. Sept. Gilb. Ann. 71. p. 124., 72. p. 123.

Ampère et Savary, notes sur ce mémoire. Ann. de Ch. et de Ph. 18. p. 370.

Ampère, exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques, faites par différens physiciens, depuis le mois de mars 1821 lu 8 Aout 1822. Journ. de phys. 94. p. 61. Notes sur cet exposé etc. Ampère recueil. p. 207—237.

Ampère, reponse à la lettre de Mr. van Beek sur une nouvelle expérience électro-magnétique. Journ. de ph. 93. p. 447.

Ampère, expériences relatives à de nouveaux phénomènes électro-dynamiques. Ann. de Ch. et de Ph. 20. p. 60. (Rotation des Leiters durch einen Leiter.) Gilb. Ann. 72. p. 257.

Ampère, lettre à Mr. Gerhardi sur divers phénomènes électro-dynamiques. Ann. de Ch. et de Ph. 29. p. 373.

Marsch, Tilloch Phil. Mag. 1822. Jun. Bibl. univ. 20. p. 250.

(Rotirende Platte der Kette auf dem Schenkel eines Hufeisens.)

Schweigger, über Elektromagnetismus. Schweigg. Journ. 46. p. 1—72., 48. p. 289—352.

Sturgeon, account of an impoved electromagnetic apparatus. Ann. of Phil. 1826. vol. 12. p. 357. (Rotation des Leiters um einen Elektromagnet.) Ann. of Electricity 8. p. 81. 228. 337.

Lewthwaite, new form of an experiment in electromagnetism. Ann. of Phil. 1827, vol. 2. p. 459. (Rotation des Leiters und Magnets beider um einander.)

Pouillet, Elémens de physique. 3. éd. 1. p. 528.

Nobili, apparrechio particolare per il giro de Faraday. Mem. 2. p. 14.

Watkins, a popular sketch of elektromagnetism and electrodynamics. London 1828. p. 78. (rotirende cylindrische Spiralen um einen Magnet im Innern.

Knochenhauer, über ein galvanisches Flugrad. Pogg. Ann. 45. p. 149.

Rotirende Flüssigkeiten.

Davy, on a new phaenomenon of Electro-magnetism. Ph. Tr. 1823. p. 153. (Rotation des Quecksilbers um den Magnet.)

de la Rive, récherches sur le mode de distribution de l'électricité dynamiqne dans les corps, qui lui servent de conducteurs. (Im hohlen Magnet.)

Ritchie, experimental researches in voltaic electricity and electromagnetism. Ph. Tr. 1832. p. 89. (Rotation des Wassers.)

Fechner, elektromagnetischer Rotationsapparat für Flüssigkeiten. Schweigg. Journ. 57. p, 15.

Apparate zu elektromagnetischen Versuchen überhaupt.

Die Handbücher von Roget, Barlow, Fechner, Pohl, Sturgeon, Watkins.

Nobili, memorie ed osservazioni edite colla descrizione ed analisi de suoi apparati ed instrumenti. Firenze 1834. 2 vol.

Ampère. appareil. Ann. de Ch. et de Ph. 18. p. 88. u. Récueil des observations.

de la Rive, zwei kleine elektrisch-magnetishe Apparate zum Anstellen der Ampèreschen Versuche. Gilb. Ann. 69. 81.

Pohl, der Gyrotrop, eine nützliche und bequeme Vorrichtung bei elektromagnetischen Versuchen. Kastn. Arch. 13. p. 49.

Gilbert, Untersuchung über die Einwirkung des geschlossenen galvanisch-elektrischen Kreises auf die Magnetnadel. Gilb. Ann. 66. p. 331—392. (Einfacher Apparat zu Oersteds Grundversuchen.)

Schweigger, über Elektromagnetismus. Schweigger Journ. 46. p. 1—72., 48. p. 289—352.

Siehe Galvanometer unter Galvanismus.

D. Magnetisirungserscheinungen des Schliessungsdrahtes.

Arago, expériences relatives à l'aimantation du fer et de l'acier par l'action du courant électrique. Ann. de Ch. et de Ph. 15. p. 93. Gilb. Ann. 66. p. 311.

Seebeck, Magnetismus der galvanisshen Kette. p. 44.

Erman, ib. p. 50. (Aufgeschnittene Stahlscheibe.)

Gay Lussac und Welter, in Ann. de Ch. et de Ph. 22. p. 93.

H. Davy, on the magnetic phaenomena produced by electricity. Phil. Tr. 1821. p. 7. 425. Gilb. Ann. 71. p. 225.

van Beek, Moll, van Rees und van der Bos, Versuche über das Magnetisiren des Stahls durch Maschinenelektricität. Gilb. Ann. 72. p. 12.

Yelin, über den Zusammenhang der Elektricität und des Magnetismus. Gilb. Ann. 66. p. 395. und 68. p. 17,

Boeckmann, kurzer Bericht von seinen Versuchen über die Wirkung des geschlossenen Voltaisch elektrischen Kreises auf die Magnetnadel, und über die Erregung des Magnetismus im Stahl durch die gewöhnliche Maschinenelektricität. Gilb, Ann. 61. p. 1.

de la Borne, Ann. de Ch. et de Ph. 16. p. 194.

Pfaff, Erscheinungen und Gesetze des Magnetisirens der Stahlnadeln mittelst gemeiner Elektricität auf einer ebenen Spirale aus Draht. Gilb. Ann. 69. p. 84.

Savary, mémoire sur l'aimantation. Ann. de Ch. et de Ph. 34. p. 5.

Fechner, über transversale Magnetisirung stählerner Schliessungsbogen. Schweigg Journ. 63. p. 249.

Elektromagnete.

Sturgeon, on electromagnets. Phil. Mag. 11. p. 195.

Watkins, on the magnetic powers of soft iron. Phil. Trans. 1833. p. 333.

Henry und Ten Eyk, Silliman. Americ. Journ. 19. p. 400.

Moll, sur la force magnétique, que peuvent prendre des barreaux de fer sous l'influence des courants électriques. Ann. de Ch. et de Ph. 50. p. 314.

Moll, sur l'influence de la grandeur des éléments voltaiques pour développer la force magnétique dans le fer doux. ib. 50. p. 331.

Sturgeon, an experimental investigation of the influence of electric currents on soft iron as regards the thickness of metal requisite for the full display of magnetic action, and how far thin pieces of iron are available for practical purposes. Sturgeon Ann. of El. 1. p. 470.

Pfaff, über kräftige Elektro-Magnete mit grossen und sehr kleinen Hufeisen. Pogg. Ann. 52. p. 303.

Parrot, über hohle Elektromagnete. Bullet. scientifiq. de l'Acad. de St. Petersb. 1. p. 121.

Pfaff, Versuche über den Einfluss der Eisenmasse der Elektromagnete auf die Stärke des Magnetismus bei gleicher Stärke des elektrischen Stromes. Pogg. Ann. 50. p. 636. 53. p. 309.

Alexander, über plötzliche und vollkommne Entfernung der Anziehungskraft an Elektromagneten. Pogg. Ann. 56. p. 455.

Rainey, on the feeble attraction of the electromagnet for small particles of iron. Lond. and Edinb. Ph. M. 9. p. 72. 220. 469.

Ritchie, on the cause of the remarkable difference between the attraction of a permanent and of a electromagnet on soft iron at distance. ib. 9. p. 80.

Magnus, über die Wirkung des Ankers auf Elektromagnete und Stahlmagnete. Pogg. Ann. 38. p. 417.

Fechner, über das Gesetz, nach welchem die Tragkraft weichen Eisens mit der Grösse des darauf einwirkenden Stromes wächst. Schweigg. Journ. 69. p. 274.

Fechner, de nova methodo magnetismum explorandi, qui per actionem galvanicam in ferro ductili excitatur. Lips. 4. 1835.

Lenz und Jacobi, über die Gesetze der Elektromagnete. Pogg.

Ann. 47. p. 225. 401. Bullet. de l'Ac. de St. Petersb. 1838. Juli. V. No. 2.

Jacobi, der elektromagnetische Krafthebel. Pogg. Ann. 54. p. 335.

Fechner, de magnetismo variabili, qui chalybi actione galvanica inducitur. Lips. 4. 1835.

Joule, investigations in magnetism and electromagnetism. Sturg. Ann. of El. 4. p. 131.

Joule, on electromagnetic forces. ib. 4. p. 474. 5. p. 187. 470. (Magnet aus der Länge nach geschnittenem hohlem Cylinder.)

Rudford, description of a novel form of electromagnet. Sturg. Ann. 6. p. 431.

Joule, description of a new electromagnet. Sturg. Ann. 6. p. 431.

Weber, über magnetische Friction. Resultate d. magn. Vereins. 1840. p. 46. (Radmagnet.)

E. Elektromagnetismus als bewegende Kraft.

Ritchie, on the continued rotation of a closed voltaic circuit, by an other closed circuit. Lond. and Ed. Ph. Mag. 4. p. 13. (Princip der continuirlichen Bewegung durch Umkehrung des Stromes.)

v. Kramer, Notiz über einen neuen, durch Einfluss des Erdmagnetismus wirksamen elektro-magnetischen Apparat. Pogg. Ann. 43. p. 304.

dal Negro. nuova macchina elettro-magnetica immaginata dall' ab. dal Negro. Annali delle science del Regno Lomb. Ven. 1834. Maerz.

Stratinghu Becker. Konst und Letterbode. 1835. Dec.

Botto, note sur une machine locomotive, mise en mouvement par l'électromagnetisme. Mem. di Torino. 1836. p. 155.

Jacobi, mémoire sur l'application de l'électromagnétisme au mouvement des machines. Potsdam 1835. 8. 54. S.

Jacobi, expériences électro-magnétiques, formant suite au mémoire sur l'application de l'électro-magnétisme au mouvement des machines. 8. 30 S.

Jacobi, über die Principien der elektromagnetischen Maschinen. Pogg. Ann. 51. p. 358.

Vorsselman de Heer, über den Elektromagnetismus als bewegende Kraft. Pogg. Ann. 47. p. 76.

Sturgeon, description of an electro-magnetic engine for turning machinery. Sturg. Ann. of El. 1. p. 75.

Davenport, specification of a patent for the application of electro-magnetism to the propelling of machinery. Sturg. Ann. of El. 2. p. 347. 158. 257.

Davenport, recent experiments in electromagnetic machinery. ib. 2. p. 284.

Page, experiments in electro-magnetism. Sill. Amer. Journ. 1837. Oct. Sturg. Ann. 1. p. 214.

Connell, on a revolving electro-magnetic machine. ib. 2. p. 123.

Weber, über magnetische Friction. Result. d. Gött. Ver. 1840. p. 46.

F. Elektromagnetische Telegraphie.

Lenz, über die praktischen Anwendungen des Galvanismus. Petersb. 1839. 8. 68 S. (Schilling v. Canstadt.)

Gauss u. Weber in Schumacher's astronom. Jahrbuch. 1836. p. 37.

Steinheil, über Telegraphie insbesondere durch galvanische Kräfte. München 1838. 4. 30 S.

Morse, Télégraphe électromagnétique. Ann. de Ch. et de Ph. 72. p. 219.

Wheatstone, Examination of Pr. Wheatstone and Charles A. Saunders, Secret. of the great western rail way. Sturg. Ann. of El. 5. p. 337.

Vorsselmann de Heer, théorie de la télegraphie électrique, avec la description d'un nouveau télégraphe, fondé sur les actions physiologiques de l'électricité. Bullet. des scienc. phys. en Neerl. 1839. p. 135. Pogg. Ann. 46. p. 513.

II. Inductionserscheinungen.

A. Rotationsmagnetismus.

1) Vor Faraday's Entdeckung der Induction.

Arago, de l'influence que tous les métaux exercent sur l'aiguille aimantée. Ann. de Ch. et de Ph. 27. 363. (Entdeckung des Gebietes.)

Arago, sur les déviations que les métaux en mouvement font éprouver à l'aiguille aimantée. ib. 28. p. 325.

Arago, note concernant les phénomènes magnétiques, auxquels le mouvement donne naissance. Ann. de Ch. et de Ph. 32. p. 213. (Repulsion des Magnets durch die rotirende Scheibe.)

Nobili et Bacelli, sul magnetismo del rame a di altre sostanze. Nobili Mem. 1. p. 15. Bibl. univ. 1826. Janv.

Seebeck, von den in allen Metallen durch Vertheilung zu erregenden Magnetismus. Abh. der Berl. Akad. 1825. p. 71.

Christie, on the magnetism developed in copper and other substances during rotation. Ph. Tr. 1825. p. 117.

Babbage and Herschel, account of the repetition of Mr. Aragos experiments on the magnetism manifested by various substances during the act of rotation. Phil. Tr. 1825. p. 476. (Einfluss der Schnitte.)

Harris, on the transient magnetic state of which various substances are susceptible. Ph. Tr. 1831. p. 67.

Prevost et Colladon, bibl. univ. 29. p. 316. (Abhängigkeit der Ablenkung von der Geschwindigkeit der Drehung und Entfernung der Scheibe.)

Haldat, expériences sur le magnetisme par rotation. Ann. de Ch. et de Ph. 39. p. 232.

Saigey, expériences sur le magnetisme par rotation. Bullet. univ. 1828. Jul. p. 33. Pogg. Ann. 15. p. 88.

Baumgartner, neue Versuche über die Bewegung einer Magnetnadel durch schnell rotirende Metalle. Baumgartn. Journ. 1. p. 146.

Pohl, über die durch Schwingungen, Rotation und Ablenkung versichtbarte Gegenwirkung zwischen der Magnetnadel und andern metallischen oder nicht metallischen Substanzen. Pogg. Ann. 8. p. 369.

Poisson, mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement. Mém. de l'Acad. de l'Inst. 6. p. 439.

2) Nach Faraday's Entdeckung der Induction.

Faraday, on Aragos magnetic phenomena. Experimental researches. series I. 81—139. Mv. 1831., series II., 140—264. Phil. Trans. 1832. p. 163.

Nobili et Antinori, sopra la forza elettromotrice del magnetismo. Antologia di Fir. No. 131. Nov. 1831. Mem. 1. p. 206. Ann. de Ch. et de Ph. 48. p. 412.

Nobili et Antinori, sopra vari punti di magneto-elettrismo. Antol. No. 138.

Nobili et Antinori, nouvelles expériences électro-magnétiques. Ann. de Ch. et de Ph. 50. p. 280.

Faraday, lettre à Mr. Gay-Lussac sur les phénomènes électro-magnétiques. ib. 51. p. 404.

Nobili, teoria fisica delle induzione elettro-dinamiche. Mem. 1. p. 255. Nov. 1832. Pogg. Ann. 24. p. 621., 27. p. 401.

Sturgeon, on the distribution of magnetic polarity in metallic bodies. Phil. Mag. 11. p. 270., 324. Lond. and Ed. Ph. M. 1. p. 31.

B. Magnetoinduction und Nebenstrom.

Faraday, Experimental researches in electricity.

Series I. 1) on the induction of electric currents. 1—26.

2) on the evolution of electricity from magnetism. 27—59.

3) on a new electrical condition of matter. 60—60.

4) on Aragos magnetic phenomena. 81—39. 24. Nov. 1831. Ph. Tr. 1832. p. 125. Pogg. Ann. 25. p. 91.

Series II. 5) terrestrial magneto-electric induction. 140—192.

6) general remarks and illustrations of the force and direction of magneto electric induction. 192—264. 12. Jan. 1832. Phil. Trans. 1832. 164. Pogg. Ann. 25. p. 142.

Christie, experimental determination of the laws of magneto-electric induction in different masses of the same metal and of its intensity in different metals. Ph. Tr. 1833. p. 95.

Nobili et Antinori, sopra vari punti di magneto-elettrismo. Antol. No. 138. (Funken.)

Botto, notice on the chemical action of the magneto-electric currents. Lond. and Edinb. Ph. M. 1. p. 441.

Ritchie, Experimental researches in Electro-magnetism and magneto-electricity. Ph. Tr. 1833. p. 313.

Sturgeon, on the theory of magnetic electricity. Ann. of El. 1. p. 251.

Dove, magnetoelektrische Elektromagnete. Pogg. Ann. 29. p. 462.

Lenz, über die Gesetze, nach welchen der Magnet auf eine Spirale einwirkt, wenn er ihr plötzlich genähert oder von ihr entfernt wird, und über die vortheilhafteste Construction der

Spiralen zu magneto-elektrischem Behufe. Poggend. Ann. 34. p. 385.

Lenz, über die Bestimmung der Richtung des durch elektro-dynamische Vertheilung erregten galvanischen Stromes. Pogg. Ann. 31. p. 483. (Berichtigung v. Ritchies Regeln.)

Erman, über Erzeugung von Elektromagnetismus durch blosse Modification der Vertheilung der Polarität in einem unbewegten Magnet. Abh. d. Berl. Akad. 1832. p. 17.

Dove, über inducirte Ströme, welche bei galvanometrischer Gleichheit ungleich physiologisch wirken. Pogg. Ann. 49. p. 72.

Abria, récherches sur les lois de l'induction des courants par les courants. Ann. de Ch. et de Ph. 1841. p. 1—65. 1843. v. 7. p. 462.

Masson et Brequet fils, mémoire sur l'induction. Ann. de Ch. et de Ph. 1842. 4. p. 129—153.

Gauss, Erdmagnetismus und Erdmagnetometer. Schumach. astr. Jahrb. 1836. 1.

W. Weber, das Inductionsinclinatorium. Result. d. Gött. Ver. 1837. p. 81.

W. Weber, Beweglichkeit des Magnetismus im weichen Eisen. ib. 1838. p. 118.

W. Weber, unipolare Induction. ib. 1839. p. 63.

Nebenstrom der Leidner Flasche.

Henry, Contributions to electricity and magnetism. Trans. of the Amer. Phil. Soc. vol. VI. Pogg. Ann. Erg. p. 282.

Marianini, sulle correnti per induzione leida-elettrica in Memorie di fisica sperimentale. Modena 1838. Arch. de l'élect. 3. p. 29.

Riess, Magnetisirung und Wärmeerzeugung mittelst einer durch den Schliessungsdraht der elektrischen Batterie erregten Stromes. Pogg. Ann. 47. p. 55.

Riess, über die Verzögerung der elektrischen Entladung durch Leiter, welche dem Schliessungsdrahte der Batterie nahe stehen. Pogg. Ann. 49. p. 393.

Riess, fortgesetzte Untersuchungen über den Nebenstrom der elektrischen Batterie. Pogg. Ann. 50. p. 1.

Riess, über das Maximum der Wirkung eines Nebendrahts auf die Entladung der elektrischen Batterie. Pogg. Ann. 51. p. 177.

Riess, über die Richtung des elektrischen Nebenstromes. Pogg. Ann. 51. p. 351.

Dove, über die durch Magnetisirung des Eisens vermittelst Reibungselektricität inducirten Ströme. Pogg. Ann. 54. p. 305.

Dove, über den Magnetismus der sogenannten unmagnetischen Metalle. Pogg. Ann. 54. p. 325.

Matteucci, induction de la décharge de la batterie. Biblioth. univ. 1840. Oct. p. 122. Arch. de l'élect. 1. 136.

Knochenhauer, Versuche über die gebundene Elektricität. Pogg. Ann. 58. p. 391. u. 60. p. 70.

C. Gegenstrom (Extracurrent).

Faraday, on the magneto-electric spark and shock, and on a peculiar condition of electric and magneto-electric induction. Lond and Ed. Ph. Mag. 1834. Dec.

Faraday, on the influence by induction of an electric current on itself and on the inductive action of electric currents generally. Series IX. 1048—1118. 24. Jan. 1835. Ph. Tr. 1835. p. 39. Pogg. Ann. 35. p. 413.

Henry, on the influence of a spiral conductor in increasing the intensity of electricity from a galvanic arrangement of a single pair. Sturg. Ann. of El. 1. p. 282.

Moser, Repertorium I. p. 328.

Magnus, über die Wirkung des Ankers auf Elektromagnete und Stahlmagnete. Pogg. Ann. 38. p. 417.

Sturgeon, an experimental investigation of the laws which govern the production of electric shocks from a single voltaic pair of metal. Ann. of Electr. 1. p. 192.

Page, method of increasing shocks and experiments with Prof. Henry's apparatus for obtaining sparks and shocks from the calorimotor. ib. 1. p. 290.

Masson, de l'induction d'un courant sur lui même. Ann. de Ch. et de Ph. 60. p. 6.

Jacobi, über die Inductionsphänomene beim Oeffnen und Schliessen einer Volta'schen Kette. Bull. de l'Acad. de St. Petersb. III. No. 21.

Dove, über den Gegenstrom zu Anfang und zu Ende eines primären. Pogg. Ann. 56. p. 251.

Bachhoffner, letter to Sturgeon. Ann. of Elect. 1- p. 496.

Magnus, über die Wirkung von Bündeln von Eisendraht beim Oeffnen der galvanischen Kette. Pogg. Ann. 48. p. 95.

Gegenstrom der Thermokette.

Linari, Compte rend. 1836. II. p. 46.

Wheatstone, on the thermoelectric spark. Lond. and Ed. Ph. Mag. 10. p. 414.

Watkins, on thermoelectricity. Lond. and Ed. Ph. Mag. 11. p. 304.

Dove, Untersuchungen im Gebiete der Inductionselektricität. p. 37.

Gegenstrom der Kleistischen Flasche.

Dove, über die durch Magnetisirung des Eisens vermittelst Reibungselektricität inducirten Ströme. Pogg. Ann. 54. p. 305.

Nebenströme höherer Ordnung.

Henry, Contributions to electricity and magnetism. Trans. of the Americ. Phil. Soc. vol. VI. Pogg. Ann. Erg. p. 282.

Marianini, des courants électriques que détermine l'induction opéree par des courants électriques instantanés. Arch. de l'électr. 3. p. 29.

Dove, Einfluss der Anwesenheit des Eisens bei inducirten Strömen höherer Ordnungen. Untersuchungen im Gebiete der Inductionsel. p. 65.

Magneto-elektrische Maschinen.

Pixii, nouvelle construction d'une machine électro-magnetique. Ann. de Ch. et de Ph. 50. p. 322.

Watkins, on magneto-electric induction. Lond. and Ed. Ph. M. 7. p. 107.

Saxton, on his magneto-electric machine. Lond. and End. Ph. Mag. 9. p. 262.

Stratingh, beschrijving van een verbetert Faradaisch magnetisch-elektrisch werktuig. Natuur and Skeik. Arch. 1836. p. 1.

Clarke, a description of a magnetic electrical machine. Sturgeon Ann. of El. 1. p. 145.

Clarke, in reply to Mr. Saxtons article. Lond. and Ed. Ph. M. 10. p. 455.

Lenz, Beiträge zur Theorie der magnetischen Maschinen. Pogg. Ann. 57. p. 211.

Clarke, account of a series of experiments with a large magneto-electrical machine. Mem. of the Elect. Soc. 1. p. 72.

Sturgeon, description of a magnetic electrical machine having no iron armature. Ann. of El. 2. p. 284.

Ritchie, on the electric spark and shock from a permanent magnet. Lond. and Ed. Ph. M. 10. p. 280.

dal Negro, new experiments relative to the action of magnets on electro-dynamic spirals and description of a new electromotive battery. Lond. and Ed. Ph. M. 1. p. 45.

W. Weber, der Inductor zum Magnetometer. Res. des Gött. Ver. 1838. p, 36.

W. Weber, der Rotationsinductor. ib. 1838. p. 112.

Pohl, Beschreibung eines besonders zu chemischen Wirkungen dienlichen magnetroelekt. Apparats. Pogg. Ann. 34. p. 185. 500.

Gills, a description of a new form of magneto-electric machine and an account of carbon battery of considerable energy. Sturgeon Ann. of El. 5. p. 395.

Wright, on electro-magnetic coil machines. ib. 5. p. 349.

Henley, on an electro-magnetic machine, ib. 7. p. 323.

Wright, on a new electro-magnetic engine. ib. 5 108.

Bachhoffner, on the electro-magnetic machine. Sturg. Ann. of El. 2. p. 207.

Dove, Differentialinductor. Untersuchungen im Gebiete der Inductionselektricität. p. 10—18., 39—41.

Stripe, description of a new coil machine. Sturg. Ann. of El. 7. p. 211.

Nesby, on electro-magnetic coil machines. ib. 2. p. 203., 381.

Neef, über einen neuen Elektromotor. Pogg. Ann. 46. p. 104. 50. p. 236.

Eigenschaften alternirender Ströme.

de la Rive, récherches sur les propriétés des courants magneto-électriques. Mém. de la société de Génève. VIII. p. 191. Pogg. Ann. 45. p. 163.

de la Rive, mémoire sur quelques phénomènes chimiques, qui se manifestent sous l'action des courants électrîques développés par induction. Mém. de la soc. de Génève. IX. p. 161.

Lenz, über die Eigenschaften der magneto-elektrischen Ströme, eine Berichtigung des Aufsatzes des Hrn. de la Rive über denselben Gegenstand. Pogg. Ann. 48. p. 385.

de la Rive, nouvelles récherches sur les propriétés des courants électriques discontinus et dirigés alternativement en sens contraire. Arch. de l'électr. 1. p. 175.

Poggendorff, über einige Magnetisirungserscheinungen. Pogg. Ann. 45. p. 353.

III. Galvanismus.

1. Geschichte des Galvanismus.

Sué, histoire complette du galvanisme depuis sa découverte en 1789 jusqu'à ce jour, avec le détail des expériences faites et des écrits publiés sur ce phénomène. 4. vol.

Tromsdorff, Geschichte des Galvanismus oder der galvanischen Elektricität, vorzüglich in chemischer Hinsicht. Erfurt 1808.

Ritter, Beiträge zur nähern Kenntniss des Galvanismus. Jena 1800—1805.

Pfaff, Uebersicht über den Voltaismus und die wichtigsten Sätze zur Begründung einer Theorie desselben. Stuttg. 8. 1804.

Bostock, an account of the history and presente state of galvanism. London 1818. 8.

Deluc, traité élémentaire sur le fluide électrico-galvanique. Paris 1804. 2 vol. 8.

Collezione dell opere del Cavaliere Conte Alessandro Volta. Firenze 1816. 3 vol. 8.

Weber, der Galvanismus, eine Zeitschrift. Landshut, 1822. 3.

Aldini; Traité théorique et expérimental sur le galvanisme. Paris 1804. 2 vol. 8.

Wilkinson, elements of galvanism. 1824. 8. 2 vol.

Singer, elements of electricity and chimistry. üb. v.

Müller, Elemente der Elektricität und Elektrochemie, mit Anmerkungen, welche die neuesten elektrischen Entdeckungen enthalten. Berlin 1819. 8. 502 S.

2. Volta's Fundamentalversuch.

Volta, sull electricita eccitata dal contatto de conduttori dissimili. Brugnatelli An. di Ch. 13. p. 226.

Volta, on the electricity excited by the mere contact of conducting substances of different kinds. Ph. Tr. 1800. p. 402.

Annali di Chimica. Tom 14. Ritter, Beiträge zur näheren Kenntniss des Galvanismus. I., St. 3. Ann. de Ch. 29. p. 91.

Rapport fait à la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut national sur les expériences du citoyen Volta. Paris 4. Gilb. Ann. 10. p. 389.

Pfaff, über Volta's Fundamentalversuch. Gilb. Ann. 68. p. 273.

Egen, Bemerkung über die durch Berührung erregte Elektricität. Gilb. Ann. 69. p. 385.

Schmidt, Wiederholung von Volta's Fundamentalversuchen. Gilb. Ann. 70. p. 229.

Bischof und v. Münchow, über die durch Berührung ungleichartiger und gleichartiger Metalle erregte Elektricität. Pogg. Ann. 1. p. 279.

Pfaff, über den Voltaschen Fundamentalversuch, mit Rücksicht auf einen Aufsatz d. Hrn. Bischof und v. Münchow. Schweigg. Journ. 46. p. 129.

Fechner, Beitrag zu den galvanischen Fundamentalversuchen. Schweigg. Journ. 53. p. 429.

Fechner, über einen Apparat zur Anstellung der Voltaschen Grundversuche. Pogg. Ann. 41. p. 225.

Fechner, einige Versuche zur Theorie des Galvanismus. Pogg. Ann. 43. p. 433.

Péclet, recherches sur le développement de l'électricité statique pendant le contact des corps. Arch. de l'électricité. 1. p. 621.

Belli, description de quelques expériences faites avec un nouvel appareil sur l'origine de l'électricité voltaique. Arch. de l'élect. 1. p. 651.

Gegen Volta.

de la Rive, récherches sur la cause de l'électricité voltaique. Mém. de la Société de Ph. et d'Hist. nat. de Génève; prem. partie: récherches des causes, qui déterminent la production de l'électricité voltaique sous forme de courant, IV. p. 285.; seconde partie: récherche des causes, qui déterminent la production de l'électricité dite de contact sous forme de tension. VI, p. 149. u. VII. p. 487.

de la Rive, über die Voltasche Elektricität und über die die chemischen Actionen begleitende Elektricität. Compt. rend. 1835. p. 312. Pogg. Ann. 37. p. 312.

Becquerel, du degagement de l'électricité qui résulte du contact de deux métaux. Ann. de ch. et de ph. 38. p. 113.

Walcker, über die Ursachen, welche Elektricität erregen. Pogg. Ann. 4. p. 301. 443.

Parrot, Handbuch der Physik. II. p. 554. Gilb. Ann. 61. p. 283.

Parrot, sur les phénomènes de la pile voltaique. Ann. de Ch. et de Ph. 42. p. 45.

Gautherot, récherches sur les causes qui développent l'électricité dans les appareils galvaniques. Journ. de Ph. 56. p. 429.

3. Contact-Theorie.

Volta, de l'électricité dite galvanique. Ann. de Ch. 40. p. 255. Gilb. Ann. 10. p. 421.

Volta, sull identita del fluido electrico ed fluido galvanico. Brugn. Ann. 19. p. 38. 163.

Volta, réponse aux observations de Nicholson sur sa théorie. Bibl. univ. 19. p. 274.

Pfaff, Grundzüge von Volta's elektrischer Theorie der Erscheinungen seiner Säule. Gilb. Ann. 10. p. 219.

Pfaff, Uebersicht über den Voltaismus und die wichtigsten Sätze zur Begründung einer Theorie desselben. Stuttgart 1804.

Pfaff, Revision der Lehre vom Galvano-Voltaismus.

Pfaff, défense de la théorie de Volta, relative à la production de l'électricité par le simple contact, contre les objections de Mr. de la Rive. Ann. de Ch. et de Ph. 41. p. 236.

Hildebrandt, über die Unabhängigkeit der Erregung des Galvanismus von dem Unterschiede der Oxydabilität in den einander berührenden Erregern. Gehl. Journ. der Ph. u. Ch. 6. p. 36.

Behrens, das Merkwürdige aus Versuchen über Elektricität. Gilb. Ann. 23. p. 1.

Fechner, Rechtfertigung der Contacttheorie des Galvanismus. Pogg. Ann. 42. p. 481. (Experim. crucis. p. 508.)

Fechner, einige Versuche zur Theorie des Galvanismus. Pogg. Ann. 43. p. 433.

Fechner, Versuch einer Theorie des Galvanismus. Pogg. Ann. 44. p. 14.

Henrici, über die Elektricität der galvanischen Kette. Göttingen 1840. 8.

Marianini, mémoire sur la théorie chimique des electro-moteurs

voltaiques simples et composés. Ann. de Ch. et de Ph. 45. p. 28.

Pfaff, über und gegen die Entwickelung der Elektricität durch chemischen Process, nebst einem Anhang über das elektromotorische Verhalten der Flüssigkeiten gegen Metalle. Pogg. Ann. 51. p. 110. 197.

Martens, mémoire sur la pile voltaique et la manière dont elle opère la décomposition des corps. Mém. de l'Acad. de Bruxelles. XII.

Henrici, Untersuchungen über einige anomale und normale galvanische Erscheinungen. Pogg. Ann. 55. p. 253.

Poggendorff, über die Voltaschen Ketten mit zwei einander berührenden Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 53. p. 436.

Poggendorff, über die galvanischen Ketten aus zwei Flüssigkeiten und zwei einander nicht berührenden Metallen. Pogg. Ann. 49. p. 31.

Poggendorff, über die Frage, ob es wirksame galvanische Ketten ohne primitive chemische Action gebe, und über die Bildung der Eisensäure auf galvanischem Wege. Pogg. Ann. 54. p. 353.

Martens, recherches sur la passivité des métaux et sur la théorie de la pile voltaique. Bull. de l'Acad. roy. de Brux. 8. p. 305. Pogg. Ann. 55. p. 437.

4. Chemische Theorie.

de la Rive, recherches sur la cause de l'électricité voltaique. Génève. 4.

Fabroni, sur l'action de différents métaux à la température commune de l'atmosphère et explication de quelques phénomènes galvaniques. Journ. de Phys. 49. p. 348. Gilb. Ann. 4. p. 428.

Bostock, outlines of the history of galvanism with a theory of the action of the galvanic apparatus. Nichols Journ. 1802. Aug. p. 296., Sept. p. 3.

Bostock, on the theory of galvanism. ib. 1802. Oct. p. 69.

Wollaston, experiments on the chemical production and agency of electricity. Ph. Tr. 1801. p. 427.

H. Davy, on the relations of electrical and chemical changes. Ph. Tr. 1826. p. 383.

H. Davy, notice of some observations on the causes of the gal-

vanic phenomena, and on certain modes of increasing the powers of the galvanic pile of Volta. Nichols Journ. 4. p. 337. 394.

H. Davy, outlines of a view of galvanism. Roy. Inst. 1. p. 49. Tilloch Ph. Mag. 11. p. 326.

Ritchie, an experimental examination of the electric and chemical theories of galvanism. Ph. Tr. 1829. p. 361.

Roget, galvanism. p. 30.

Prideaux, on the theory of voltaic action. Lond. and Ed. Ph. M. 2. p. 210. 251.

Berzelius, Theorie der elektrischen Säule. Gehl. J. d. Ch. 3. p. 176.

Becquerel, Compt. rend. 1842. 24. Janv.

Gmelin, Versuch einer elektrochemischen Theorie. Pogg. Ann. 44. p. 1.

Schönbein, einige Bemerkungen über Fechners Rechtfertigung der Contacttheorie. Pogg. Ann. 44. p. 59.

Faraday, on the source of power in the voltaic pile. Series 16. 17. Phil. Tr. 1840. p. 61—127.

Mulder, natuur-en scheikundig onderzoek naar de dienst der vloeistof in galvanische Toestellen. Natur en Scheik. Archief. 1833. p. 105—283., 321—493.; 1834. p. 243 -417.

Karsten, über Contact-Elektricität. Berlin 1836. 8. 150 S.

Parrot, observations relatives au mémoire de Mr. Marianini sur la théorie chimique des électromoteurs voltaiques simples et composés. Ann. de Ch. et de Ph. 46. p. 337.

5. Mathematische Theorie der galvanischen Erscheinungen.

Ohm, die galvanische Kette mathematisch bearbeitet. Berlin 1827. 8. 245 S.

Fechner, Maassbestimmungen über die galvanische Kette. Leipzig 1831. 4.

Pouillet, mémoire sur la pile de Volta et sur la loi générale d'intensité que suivent les courants, soit qu'ils proviennent d'une pile à petite ou à grande tension. Compt. rend. 1837. I. p. 267. Pogg. Ann. 42. p. 281.

Ohm, vorläufige Anzeige des Gesetzes, nach welchem Metalle, die Contactelektricität leiten. Pogg. Ann. 4. p. 79. Schweigg. Journ. 44. p. 110. 1825.

Ohm, Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen. Pogg. Ann. 6. p. 459. u. 7. p. 45., 117. 1826.

Ohm, einige elektrische Versuche. Schweigg. Journ. 49. p. 1. 1827.

Ohm, Nachträge zu seiner mathematischen Bearbeitung der galvanischen Kette. Karsten's Arch. 14. p. 475.

Ohm, Nachweisung eines Ueberganges von dem Gesetze der Elektricitätsverbreitung zu dem der Spannung. Kastn. Arch. 7. p. 1. u. 452.

Ohm, gehorcht die hydroelektrische Kette den von der Theorie ihr vorgeschriebenen Gesetzen oder nicht? Frage und Antwort. Schweigg. Journ. 58. p: 393. 1830.

Fechner, Beiträge zur Lehre vom Galvanismus. Schweigg. Journ. 57. p. 291.

Fechner, von der erregenden Oberfläche, gegen de la Rive für die Ohmsche Theorie sprechende Versuche. Schweigg. Journ. 57. p. 9.

Fechner, Versuche über die elektromotorische Kraft in geschlossenen Ketten. ib. 60. 17.

Fechner, über die Wirkungsabnahme und Wirkungswiederherstellung galvanischer Ketten. Schweigg. Journ. 63. p. 249.

Ohm, Versuche über den Zustand der geschlossenen einfachen galvanischen Kette und daran geknüpfte Beleuchtung einiger dunkler Stellen in der Lehre vom Galvanismus. Schweigg. Journ. 63. p. 1. 159. 1831.

Ohm, an Thatsachen fortgeführte Nachweisung des Zusammenhangs, in welchem die mannigfaltigen Eigenthümlichkeiten galvanischer, insbesondere hydro-elektrischer Ketten untereinander stehen. Schweigg. Journ. 63. p. 385., 64. p. 21. 138. 257. 1832.

Ohm, zur Theorie der galvanischen Kette. Schweigg. Journ. 67. p. 341.

Ohm, theoretische Herleitung der Gesetze, nach welchen sich das Erglühen von Metalldrähten durch die galvanische Kette richtet, und nähere Bestimmung der Modification, die der elektrische Strom durch Spitzen erleidet. Kastn. Arch. 16. p. 1. 1829.

Henrici, zur Galvanometrie. Pogg. Ann. 53. p. 277.

Poggendorff, Methode, die relativen Maxima der Stromstärken zweier Voltaschen Ketten zu bestimmen. Pogg. Ann. 55. p. 43.

Jacobi, eine Methode, die Constanten der Voltaschen Ketten zu bestimmen. Pogg. Ann. 57. p. 85.

Poggendorff, über Hrn. de la Rive's Hypothese vom Rückstrom in der Voltaschen Säule. Pogg. Ann. 56. p. 353.

Draper, on the use of a secondary wire as a measure of the relative tension of electric currents. Lond. and Ed. Mag. 15. p. 206. 339.

Vorsselman de Heer, sur l'intensité des courants électriques. Bullet. des sciences physiques en Neerlande. 1839. p. 319.

Poggendorff, Methode zur quantitativen Bestimmung der elektromotorischen Kraft inconstanter galvanischer Ketten. Pogg. Ann. 54. p. 161.

Uebergangswiderstand.

Fechner, Maassbestimmungen der galvanischen Kette.

Vorsselman de Heer, sur la prétendue perte, qu'éprouve l'électricité en passant d'un métal dans un liquide ou vice-versa. Explication de la resistance dite de passage. Bullet. de sc. ph. en Neerl. 1840. p. 122.

Poggendorff, über die Wirklichkeit des Uebergangswiderstandes bei hydroelektrischen Ketten. Pogg. Ann. 52. p. 497.

Vorsselman de Heer, noch Einiges über den Uebergangswiderstand. Pogg. Ann. 53. p. 31.

Lenz, Bemerkungen über einige Punkte aus der Lehre vom Galvanismus. Pogg. Ann. 47. p. 584. u. 59. p. 203. 407.

Aeltere hierher gehörige Beobachtungen.

Ritter, expériences sur un appareil à charger d'électricité avec la colonne électrique de Volta. Journ. de Phys. 1803. vol. 57. p. 345.

Marianini, saggio di esperienze elettrometriche. Vened. 1828. p. 47.

de la Rive, analyse des circonstances qui déterminent le sens et l'intensité du courant électrique dans un élément voltaique. Ann. de Ch. et de Ph. 57. p. 225.

6. Polarisation und Ladung.

Oersted, Versuch über Zambonis zweigliedrige Kette. Schweigg. Journ. 33. p. 163. Ann. de Ch. 28. p. 190.

de la Rive, sur une propriété particulière des conducteurs métalliques de l'électricité. Mém. de la Soc. de Genève III. p. 201.

Ritter, Ladungssäule. Voigts Magazin 6. p. 97.

Marianini, sur les piles secondaires de Ritter. Ann. de Ch. et Ph. 38. p. 5.

van Beek, sur un phénomène extraordinaire concernant l'influence continue qu'exerce le contact des métaux hétérogènes sur leurs propriétés chimiques, long-tems après que ce contact a cessé. Ann. de ch. et de ph. 38. p. 49.

Wetzlar, über die elektromagnetischen Wirkungen homogener Theile eines Metalls bei ungleichzeitiger Berührung mit einer chemisch einwirkenden Flüssigkeit. Schweigg. Journ. 58. p. 302.

Fechner, über Umkehrung der Polarität in der einfachen Kette. Schweigg. Journ. 53. p. 61.

Schönbein, Beobachtungen über die elektrische Polarisation fester und flüssiger Leiter. Pogg. Ann. 46. p. 109., 47. p. 101., 56. p. 135.

Henrici, über die Wirkung elektrischer Entladungen auf die sie vermittelnden Metalle und Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 46. p. 585.

Henrici, über die elektrische Polarisirung der Metalle. Pogg. Ann. 47. p. 431.

Munk af Rosenschöld, über die durch elektrische Ströme hervorgebrachten Ladungserscheinungen. Pogg. Ann. 43. p. 207.

Munk af Rosenschöld, von einer Veränderung des elektromotorischen Zustandes der Oberfläche des Zinks in Berührung mit alkalischen Flüssigkeiten unter Mitwirkung des elektrischen Stromes. Pogg. Ann. 47. p. 418.

Fechner, Beiträge zu den elektrochemischen Merkwürdigkeiten der salpetersauren Silberauflösung. Pogg. Ann. 47. p. 1.

Schröder, über elektrische Ströme durch ungleichzeitiges Eintauchen homogener Metalle. Pogg. Ann. 54. p. 57.

Vorsselman de Heer, sur la polarisation des fils et des lames, qui ont servi à opérer des décompositions chimiques. Bullet. des Scienc. ph. en Neerl. 1840. p. 105.

Pfaff, über das Vermögen von Metalldrähten, welche als Leiter der Voltaschen Säule in der Gasentbindungsröhre gedient haben, nach aufgehobener Verbindung mit der Säule noch ferner Gas zu entwickeln. Schweigg. Journ. 53. p. 77.

Pohl, über die Phaenomene der sogenannten elektrischen Ladung. Kastn. Arch. 6. p. 385.

Passivität.

Keir, Experiments and observations on the dissolution of minerals in acids and their precipitations. Ph. Tr. 1790. p. 359 üb. von Lentin. Gött. 1791. 8. 40 S.

Wetzlar, Beiträge zur chemischen Geschichte des Silbers. Schw. Journ. 52. p. 466. und 53. p. 94.

Wetzlar, über den elektrodynamischen Zustand, welchen Eisen und Stahl durch Berührung mit saurer salpetersaurer Silberlösung oder reiner Ammoniakflüssigkeit erlangen. Schweigg. Journ. 56. p. 206—227.

Dumas, Ann. de l'industrie. Franç. 1829.

Schönbein, über das Verhalten des Eisens zum Sauerstoff. Basel 1837.

Schönbein, on a peculiar voltaic condition of iron. Lond. and Ed. P. M. 9. p. 53. 122. 259., 10. p. 133. 172. 267., 13. p. 256.

Faraday, remarks on. ib. 9. p. 57. 122., 10. p. 175.

Herschel, on the prepared or peculiar condition of iron. Lond. and Ed. Ph. M. 11. p. 329.

Schönbein, über das Verhalten des Zinns und des Eisens gegen die Salpetersäure. Pogg. Ann. 37. p. 390. 590., 38. p. 444.

Schönbein, über Faraday's Hypothese in Betreff der Ursache der Passivität des Eisens in Salpetersäure. Pogg. Ann. 39. p. 137.

Schönbein, Beobachtungen über einen eigenthümlichen Zustand des Eisens. Pogg. Ann. 57. p. 63.

Andrews, on the properties of voltaic circles in which concentrated acid is the liquid conductor. Irish. Trans. 18. p. 149.

Martens, recherches sur la passivité des métanx et sur la théorie de la pile voltaique. Arch. de l'él. 2. p. 531.

Schönbein, neue Beobachtungen über die chemische Wirksamkeit der einfachen Kette und die Passivität des Eisens. Pogg. Ann. 59. p. 421.

Chemische Zersetzung durch Galvanismus.

Nicholson und Carlisle, experiments in galvanic electricity. Tilloch Ph. Mag. 7. p. 337. Beschreibung des neuen elektri-

schen oder galvanischen Apparats Alexander Volta's und einiger wichtiger damit angestellter Versuche. Nichols. Journ. of nat. phil. 4. p. 179. Gilb. Ann. 6. 340. (Wasserzersetzung entdeckt.)

Cruikshank, some experiments and observations on galvanic electricity. Nichols. Journ. 4. p. 187. Gilb. Ann. 6. p. 360.

W. Henry, experiments on the chemical effects of galvanic electricity. Nichols Journ. 4. p. 223. Gilb. Ann. 6. p. 368. (Versuche mit Alkalien und Säuren.)

H. Davy, an account of some experiments made with de galvanic apparatus of Sign. Volta. Nichols Journ. 4. p. 275. 326. Gilb. Ann. 7. p. 114. (Wasserzersetzung in getrennten, durch Muskelfaser verbundenen Gefässen.)

Ritter, über die chemischen Erscheinungen des Wassers. Ritters Beiträge zur Kenntniss des Galvanismus. St. II. Th. 1. (Ritter's Theorie der Einfachheit des Wassers.)

Simon, Beschreibung einiger Versuche über die Wirkung der Voltaschen Säule in Beziehung auf Ritter's Erfahrungen. Scheerer's Journal d. Chem. 6. p. 29.

v. Grotthuss, sur la décomposition de l'eau et des corps, qu'elle tient en dissolution par l'action galvanique. Ann. de chim. 58. p. 55. Gehlen Journ. der Chem. und Phys. 5. p. 110. (Theorie der Wasserzersetzung.)

v. Grotthuss, physisch-chemische Forschungen. Nürnberg 1820.

Ruhland, über den Einfluss des Wassers auf Cohäsionsveränderungen. Schweigg. Journ. 18. p. 49.

Ritter, über Stoffverpflanzungen innerhalb feuchter Leiter im Kreise der Voltaschen Säule. Gehlen Journ. d. Ch. 7. p. 364.

Hisinger und Berzelius, Versuche, betreffend die Wirkung der elektrischen Säule auf Salze und auf einige von ihren Basen. Gehlen's neues Journal d. Chem. 1. p. 115.

H. Davy, on some chemical agencies of electricity. 20. Nov. 1806. Ph. Tr. 1807. p. 1. Gilb. Ann. 28. p. 1. (Ueberführen der Stoffe.)

H. Davy, on some new phenomena of chemical changes produced by electricity particularly the decomposition of the fixed alkalies, and the exhibition of the new substances, which constitute their bases, and on the general nature of alkaline bodies 19. Nov. 1807. Phil. Tr. 1808. 1. Gehlen Journ d. Ch. 7. p. 595.

H. Davy, electrochemical researches on the decomposition of the earths, with observations on the metals obtained from the alkaline earths and on the amalgam produced from Ammonia 30. Jun. 1808. Ph. Tr. 1808. p. 333. Gehlen Journ. der Chem. 9. p. 484.

H. Davy, an account of some new analytical researches on the nature of certain bodies, particularly the alcalies, phosphorus, sulphur, carbonaceous matter and the acids hitherto uncompounded, with some general observations on chemical theory. Ph. Tr. 1809. p. 1.

Seebeck, Beobachtungen über Reduction verschiedener Erden und des Ammoniums, 30. März 1808. Gehleu Journ. f. Ch. u. Ph. 5. p. 482.

Seebeck, Anwendung des Quecksilbers zur Darstellung des Kalium-Amalgam ib. 5. p. 710.

Gay-lussac et Thenard, recherches physicochimiques sur la pile faites a l'occasion de la grande batterie donnée pas S. M. J. a l'école polytechnique, sur les propriétes du potassium et du sodium, sur la décomposition de l'acide boracique, sur les acides fluorique, muriatique et muriatique oxigené, sur l'action chimique de la lumière, sur l'analyse végétale et animale. 2 vol. 8. Paris 1811.

Jaeger, Bemerkungen über die Veränderung, welche mehrere vegetabilische Reagentien erleiden, wenn sie mit einzelnen, oder mit verschiedenen paarweise mit einander verbundenen Metallen in Berührung kommen und Versuch einer hypothetischen Erklärung dieser Thatsachen. Gilb. Ann. 11. p. 288. 316.

Ruhland, über den Gegensatz der Elektricität und des Chemismus. Gehlen Journ. d. Chem. 9. p. 426. (2 Flüssigkeiten d. den Frosch geschlossen.)

Buchholz, über eine merkwürdige Absonderung einer Portion Zinn in regulinischer nach Art der Metallbäume gewachsener Gestalt aus einer Auflösung desselben in Salzsäure. Gehlen Journ. d. Ch. 3. p. 423.

Ritter, über ein von Buchholz beobachtetes galvanisches Phaenomen. ib. 4. p. 253.

Ritter, über verschiedene physikalisch chemische Gegenstände. Gehlen Journ. d. Chem. und Ph. 1. p. 351.

Buchholz, über die chemische Wirksamkeit der einfachen galvanisch elektrischen Ketten aus Metallauflösungen, Wasser oder Säuren und Metallen besonders in Hinsicht auf die dadurch bewirkte Desoxydation der Metalloxyde. Gehlen Journ. d. Ch. und Ph. 5. p. 127. (Buchholz. Kette.)

Fischer, das Verhältniss der chemischen Verwandtschaft zur galvanischen Elektricität in Versuchen dargestellt. Berlin 1830. 8. 238 S.

Edm. Davy, on a simple electro-chemical method of ascertaining the presence of different metals, applied to detect minute quantities of metallic poisons. Ph. Tr. 1831. p. 147.

Becquerel, des décompositions chimiques opérées avec des forces électriques à très petite petite tension. Ann. de ch. et de ph. 34. p. 153.

Becquerel, de l'électricité dégagée dans les actions chimiques et de l'emploi de très faibles courants électriques pour provoquer la combinaison d'un grand nombre de corps. ib. 35. p. 113.

Becquerel, sur l'électrochimie et l'emploi de l'électricité pour opérer des combinaisons. ib. 41. p. 236.

Becquerel, note sur la décomposition du sulfure de soufre à l'aide de l'électricité. ib. 42. p. 76.

Becquerel, sur les sulfures, iodures, bromures métalliques. ib. 42. p. 131.

Becquerel, mémoire sur de nouveaux effets électro-chimiques propres à produire de combinaisons, et sur l'application à la cristallisation du soufre et d'autres substances. ib. 43. p. 131.

Becquerel, sur un procedé électro-chimique pour retirer le manganèse et le plomb des dissolutions dans lesquelles ils se trouvent. ib. 43. p. 380.

Becquerel, considerations générales sur les décompositions électrochimiques et la reduction de l'oxide de fer, de la zircone et de la magnésie, à l'aide de forces électriques peu énergiques. ib. 48. p. 337.

Becquerel, de la cristallisation de quelques oxides métalliques. ib. 51. p. 101.

Golding Bird, observations on electro-chemical influence of long continued electric currents ef low tension. Ph. Tr. 1837. p. 37.

Connel, on the action of voltaic electricity on alcohol, ether and aqueous solutions. Edinb. Trans. 13. p. 440.

Connel, on the action of voltaic electricity on pyroxylic spirit, and solutions in water, alcohol and ether. ib. 14. p. 110.

Connel, further researches on the voltaic decomposition of aqueous and alcoholic solutions. Edinb. Trans. 15. p. 151.

Schönbein, über einige elektrolysirende Wirkungen der einfachen Kette. Pogg. Ann. 51. p. 35.

Elektrolytisches Gesetz.

Faraday, on electro-ehemical decomposition. 5 series. p. 127. 1833 Jun. 7 series. p. 195. 1834.

Walker, an account of experiments with a constant voltaic battery. Transaet. of the Lond. Electr. Soc. 1. p. 57.

Jacobi, über das chemische und magnetische Galvanometer. Pogg. Ann. 48. p. 26.

Weber, über das chemische Aequivalent des Wassers. Resultate d. Gött. V. 1840. p. 91.

Poggendorff, über die Bedeutung des Gesetzes des elektrolytischen Action. Pogg. Ann. 44. p. 642.

Daniell, on the electrolysis of secondary compounds. Ph Tr. 1839. p. 97. 1840. p. 209. Pogg. Ann. Erg. p. 565.

Voltameter.

Faraday, Experimental Researches in Electricity. series 7. p. 709—740.

Gassiot, account of experiments with voltameters, having electrodes exposing different surfaces. Trans. of the Lond. Elect. Soc. 1. p. 107.

Poggendorff, verbesserte Einrichtung des Voltameters zur getrennten Auffangung beider Bestandttheile des Wassers. Poggend. Ann. 55. p. 277.

Becquerel 2, décomp. électroch. de l'eau. Arch. de l'ét. 1. p. 381.

Praktische Anwendung des Galvanismus.

H. Davy, on the corrosion of copper-sheeting by seawater and on methods of preventing this effect, and on thier application to ships of war and other ships. Phil. Trans. 1824. p. 121.

H. Davy, additional remarks and observations on the application of electrical combinations to the preservation of the copper sheating of ships and to other purposes. Ph. Tr. 1824. p. 242.

H. Davy, further researches on the preservation of metals by electro-chemical means. Ph. Tr. 1825. p. 328.

Dumas, note sur l'influence qui exerce l'électricité développée par le contact des métaux sur les dépots de carbonate de chaux dans les tuyaux de plomb. Ann. de Ch. et de Ph. 33. p. 265.

Anlaufen der Metalle durch Elektricität.

Pristley, an account of rings consisting of all prismatic colours made by electrical explosions on the surface of metal. Ph. Tr. 1768. p. 68.

Nobili, sur une nouvelle classe de phénomènes électro-chimiques. Ann. de Ch. et de Ph. 34. p. 419.

Nobili, sur la déformation des apparencs électro-chimiques. bibl. univ 36. p. 3.

Nobili, note sur les apparences électriques de Pristley. Ann. de Ch. et de Ph. 37. p. 211.

Nobili, suc colori in generale ed in particolare sopra una nuova scala cromatica dedotta della metallocromia ad uso delle scienze e delle arti. Memor. 1. p. 163—188. appendice sopra la polarisatione de colori. p. 188.

Nobili, apparechio a punte per le apparenze elettro-chimiche. ib. 2. p. 15. per le tinte uniformi. p. 17.

Faraday, Phil. Mag. 1837 März.

Schönbein, einige Bemerkungen über die chemische Beschaffenheit der irisirenden Metallflächen Nobilis. Pogg. Ann. 40. p. 621.

Galvanoplastik.

Jacobi, die Galvanoplastik oder das Verfahren cohärentes Kupfer in Platten oder nach sonst gegebenen Formen unmittelbar aus Kupferauflösungen auf galvanischem Wege zu produciren. Petersb. 1840. 8. 60 S.

Spencer, an account of some experiments made for the purpose of ascertaining how far voltaic electricity may be usefull to the purpose of working in metal. Sturg. Ann. of Electr. 4. p. 238.

Jordan, a few remarks on electro-metallurgy. Lond. and. Ed. Ph. M. 89. p. 452.

Becquerel, note sur un procedé de Mr. Belfield-Lefèvre pour la fabrication du plaqué d'argent au moyen de la galvanoplastique. Compt. rend Juli 1842. Arch. de l'électr. 2. p. 465.

Grove, procédé voltaique pour graver les planches daguerréotypées. ib. 2. p. 457. Lond. and Ed. Ph. Mag. 20. p. 18.

Hoffmann, Anweisung zum Vervielfältigen einer Schrift oder Zeichnung, ausgeführt mit der Feder oder Reissfeder, durch Hülfe der galvanischen Kupferausscheidung. a. d. Dänischen. Kopenhagen 1842. 8. 22 S.

v. Kobell, die Galvanographie eine Methode gemalte Tuschbilder durch galvanische Kupferplatten im Drucke zu vervielfältigen. München 1842. 4. m. 7 Abb.

Osann, die Anwendung des hydroelektrischen Stromes als Aetzmittel. Würzburg. 8.

Vergolden.

de la Rive, notice sur un procedé electro-chimique, ayant pour objet de dorer l'argent et le laiton. Ann. de Ch. et de Ph. 73. p. 398.

de la Rive, sur l'application aux besoins de la gravure des procédés du dorage par la voie humide. Ann. de Ch. et de Ph. 75. p. 334.

Sturgeon, a familiar explication of the theory and practice of electro-gilding and electro-silvering, by means of which any person may be enabled to gild or silver coins, medallions, trinkets, ornaments, or household utensils or any other metallic article whatever, at a very trifling cost and with the utmost facility.

Böttger, neuere Beiträge zur Physik und Chemie.

Böttger, Arch. de l'électr. 2. p. 145. Ann. der Ch. u. Pharmac. 1840. Aug.

Dumas, rapport sur les nouveaux procédés introduits dans l'art du doreur. Cempt. rend. 1841. Nov. Arch. de l'ectr. 2. p. 113. Pogg. Ann. 55. p. 160.

Hossauer, über galvanische Vergoldung und Versilberung. Verh. d. Gewerbv. 1843. p. 133.

Galvanische Apparate.

Izarn, manuel du galvanisme ou description et usage des divers appareils galvaniques employés jusqu' à ce jour, tant pour les

recherches physiques et chimiques que pour les applications médicales. Paris 1805. 304 S.

1) Trogapparate.

Volta, en the electricity excited by the mere contact of conducting substances of different kinds. Ph. Tr. 1800. p. 402.

Wilkinson, elements of galvanism, with a view of its history from the first experiment of Galvani to the present time, containing also practical directions for constructing the galvanic apparatus. London 1804. 8.

Wilkinson, Beschreibung eines verbesserten Trogapparats mit einer Nachschrift von Ritter. Gehl. Journ. d. Phys. u. Chem. 7. p. 340. Gilb. Ann. 36. p. 359. Tilloch Phil. Mag. Nr. 105.

Cruikshank, some experiments and observations on galvanic electricity. Nichol. Journ. 4. p. 187. 254.

Hart, Edinb. Journ. of Sc. 4. p. 19,

Wollaston, elementary galvanic battery. Thomson Ann. of Ph. 6. p. 209. Gilb. Ann. 54. p. 9. (Galvanisches Feuerzeug.)

Döbereiner, die einfache elektrische Kette stöchiometrisch angewandt. Schweigg. Journ. 31. p. 492.

Wollastons Kette in Children an account of experiments with a large voltaic battery. Ph. Tr. 1815. p. 363.

Children, an account of some experiments performed with a view to ascertain the most adventageous method of constructing a voltaic apparatus for the purpose of chemical research. Phil. Trans. 1809. p, 32. Gilb. Ann. 36. p. 364.

Pepys, an account of an apparatus of a peculiar construction for performing magneto-electric experiments. Phil. Trans. 1823. p. 187.

Recherches physico-chimiques faites à l'occasion de la grande batterie voltaique donnée par Sa Maj. Imp. à l'école polytechnique. Paris 1811.

Hare, a memoir on some new modifications of galvanic apparatus with observations in support of his theory of galvanism. Sillim. Amer. Journ. 5. p. 105. Annals of Philos. New Ser. 2. p. 330. (Calorimotor.)

Hare, a new theory of galvanism. supported by some experiments and observations made by means of the Calorimotor a new galvanic instrument. Philadelph. 1819. 8. 17 S.; andre Trog-

apparate v. Hare. Silliman Amer. Journ. vol. 7 u. v. 26. p. 356.

Pohl, der Siderophor ein zur Anstellung galvanisch magnetischer Versuche eigenthümlich eingerichteter galvanischer Trogapparat. Kast. Archiv 14. p. 273.

Faraday, on an improved form of the voltaic battery. Experim. Research. 10 series. Phil. Trans. 1835.

J. Young, an account of a voltaic battery. Phil. Mag. Ser III. vol. 10. p. 241. Pogg. Ann. 40. p. 624.

Tihovsky und Helwig, Versuche über den Galvanismus. Scherer Journ. d. Chem. 7. p. 617. (Kohlensäule.)

Kemp, voltaic batteries with amalgamated zinc. Jameson Edinb. Ph. Journ. 1828. Sturgeon. Ann. of Electr. 1. p. 81.

Roberts, on an anomalous electric condition of iron. Lond. and Ed. Phil. Mag. 16. p. 14. (Zink Eisenkette.)

Poggendorff, über die auffallende Stromstärke der Zinkeisenkette, deren Ursache und einige verwandte Gegenstände. Pogg. Ann. 50. p. 255.

2) Constante Kette.

Daniell, on Voltaic Combinations. Phil. Trans. 1836. p. 107. 125.; 1837. p. 141.; 1838. p. 41.; 1839. p. 89.; 1842. p. 137. Pogg. Ann. 42. p. 263.

Mullins, description of a voltaic battery. Sturg. Ann. of El. 1. p. 107.

Mullins, on the sustaining voltaic battery in reference to some observations of Prof. Daniell. Sturg. Ann. of El. 8. p. 465.

Jacobi, über die Kammersäule. Pogg. Ann. 43. p. 328.

van der Boon Mesch, sur les constructions différentes des batteries voltaiques et les moyens d'en augmenter les effets. Bull. des scienc. phys. en Neerlande 1839. p. 420.

Stratingh, la batterie constante employée pour fournir le gaz necessaire à la lampe à gaz hydro-oxygène, et pour produire une force motrice au moyen de gaz hydro-oxygène. Natuur en Scheikundig Archief 6. p. 259—274. Bullet des sc. ph. en Neerl. 1839. p. 445.

Grove, Voltasche Säule von grosser elektro-chemischer Kraft. Compt. rend. 8. p. 567. Pogg. Ann. 48. p. 300.

Melly, quelques expériences faites avec la pile de Grove. Arch. de l'électr. 1. p. 397.

Grüel, vortheilhafte Construction der Groveschen Kette. Pogg. Ann. 51. p. 381.

Bunsen, über die Bereitung einer das Platin der Groveschen Kette ersetzenden Kohle. Pogg. Ann. 55. p. 265.

Bunsen, über die Anwendung der Kohle zu Volta'schen Batterien. ib. p. 54. p. 417.

Reiset, nouveaux documents sur la pile de Bunsen. Ann. de Ch. et de Ph. 1843. 8. p. 28.

Schönbein, notice sur une nouvelle pile voltaique. Arch. de l'électr. 2. p. 286.

Warrington, on the employment of chromic acid as an agent in voltaic arrangements. Lond. and Ed. Ph. Mag. 20. p. 393.

Poggendorff, über die mit Chromsäure construirten galvanischen Ketten. Pogg. Ann. 57. p. 101.

de la Rive, sur une nouvelle combinaison voltaique. Arch. de l'électr. 3. p. 112.

Becquerel, sur l'électro-chimie et l'emploi de l'électricité pour opérer des combinaisons. Ann. de Ch. et de Ph. 41. p. 20.

Becquerel 2, notice sur les piles à courant constant. Ann. de Ch. et de Ph. 1841. p. 437.

Daniell, on the constant voltaic battery. Sturg. Ann. of El. 8. p. 456.

Becquerel 2, lettre en reponse à un article de Mr. Daniell. Ann. de Ch. et de Ph. 1842. v. 5. p. 412.

Poggendorff, über einen Versuch des Hrn. Daniell und die daraus gezogene Folgerung. Pogg. Ann. 56. p. 150.

Henrici, über die Anwendung des Natriumamalgames zu galvanischem Behufe. Pogg. Ann. 58. p. 232.

3) Ketten mit einem Metall und zwei Flüssigkeiten.

H. Davy, an account of some galvanic combinations formed by the arrangement of single metallic plates and fluids, analogous to the new galvanic apparatus of Mr. Volta. Phil. Trans. 1801. p. 397. Journ of the Roy. Inst. 1802. p. 51. Nichols. Journ. 1. p. 144.

H. Davy, an account of a method of constructig simple and compound galvanic combinations without the use of metallic sub-

stance, by means of charoal and different fluids. Tilloch Phil. Mag. 11. p. 340.

Karsten, über Contactelektricität. Berlin 1836. 8.

Karsten, die elektrische Polarisirung des Flüssigen als das Wesen aller galvanischen Thätigkeit der Ketten aus starren und flüssigen Leitern. Abh. der Berl. Akad. 1838. p. 1.

Buchholz Kette (siehe oben p. 180.).

Becquerels Kette.

Becquerel, über einen elektro-chemischen Apparat, der wie die Voltasche Säule zu Zersetzungen dienlich ist. bibl. univ. 60. p. 215. Pogg. Ann. 37. p. 429.

Mohr, über Becquerels einfachen galvanischen Apparat, der zur Zersetzung dienlich seyn soll. Pogg. Ann. 39. p. 129.

Jacobi, über Becquerels einfache Sauerstoffkette. Pogg. Ann. 40. p. 67.

Moser, in Repertor. d. Phys. I. p. 194.

Mohr, über Becquerels einfache Kette, deren Strom aus der Verbindung von Säure und Alkali entstehen soll. Pogg. Ann. 42. p. 76.

Dulk, über Elektricitätserregung bei chemischen Verbindungen. Pogg. Ann. 42. p. 91.

Pfaff, über die Becquerelsche Kette. Pogg. Ann. 44. p. 542.

Becquerel, über die chemischen Zersetzungen mittelst einfacher hydroelektischer Apparrate. Compt. rend. 6. p. 125. Pogg. Ann. 44. p. 537.

Henrici, über die sogenannte Becquerelsche Kette. Pogg. Ann. 48. p. 372.

Fechner, über die Becquerelsche Kette und die Elektricitätserregung durch gegenseitige Berührung den Flüssigkeiten im Allgemeinen. Pogg. Ann. 48. p. 1. 225.

Unwirksame Ketten.

de la Rive, recherches sur la cause de l'électricité voltaique. Pogg. Ann. 40. p. 367. (Aetzkali, Eisen, Platin.)

Faraday, on the source of power in the voltaic pile. Series 17. Phil. Trans. 1840. §. 1823.

Henrici, Untersuchungen über einige anomale und normale galvanische Erscheinungen. Pogg. Ann. 55. p. 253. (Schwefelkaliumlösung als Flüssigkeit.) Pogg. Ann. 58. p. 375.

Ketten aus zwei Flüssigkeiten und zwei einander nicht berührenden Metalle.

Faraday, on the source of power in the voltaic pile. Series 17. Phil. Trans. 1840. §. 2017. Pogg. Ann. 53. p. 549.

Poggendorff, über die galvanischen Ketten aus zwei Flüssigkeiten nnd zwei einander nicht berührenden Metallen. Pogg. Ann. 49. p. 31.

Pohl, über galvanische Ketten mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten und über einiges aus den neuesten diesen Gegenstand betreffenden Untersuchungen. Pogg. Ann. 54. p. 515.

Poggendorff, Erwiderung darauf. ib. p. 590.

Zweigliedrige Ketten.

Zamboni, della pila binaria e sua influenza nell' elettromotoro uperpeto. l'Elettromotoro perpetuo II. p. 161. Giorn. di Fisica di Pavia 1814. 3. Ann. de Ch. et de Ph. 11. p. 190.

Erman, über die elektrische Spannung, welche durch eine blosse geometrische Ungleichheit der Berührungsflächen erregt wird. Abh. der Berl. Akad. 1816. p. 216. Gilb. Ann. 64. p. 45.

Faraday, on the source of power in the voltaic pile. Series 17. Ph. Tr. 1840. §. 2024. Pogg. Ann. 53. p. 551.

Gas batterie.

Grove, on a gaseous voltaic battery. Lond. and. Ed. Ph. Mag. 21. p. 417. Pogg. Ann. 58. p. 202.

Schönbein, über die Sauer-Wasserstoffsäule. Pogg. Ann. 58. p. 361.

Trockne Säule.

Zamboni, l'elettromotoro perpetuo. Verona 1820. 2 vol. 8.

Gilbert, einige historische Nachrichten von den trocknen elektrischen Säulen der Hrn. Deluc und Zamboni. Gilb. Ann. 49. p. 35.

Deluc, analysis of the voltaic pile. Nichols. Journ. of nat. ph. 1810 Mai. Nr. 117. Gilb. Ann. 49. p. 67.

Deluc, on the electric column and aerial electroscop. Nichols. Journ. Oct. 1810. Nr. 122. Gilb. Ann. 49. 67.

Zamboni, dissertazione sulla pila elettrica a secco. Brugnatelli Giorn. 1812. 5. p. 424—446.

Zamboni, descrizione della colonna elettrica del Sign. Deluc, e considerazioni sull analisi de lui fatta della pila Voltiana. ib. 1813. p. 31.

Azzallini, kurze Erläuterung des Zambonischen immerwährenden Elektromotors. München 1816. 4.

Zamboni, nouvelle pile à deux éléments et perfectionement de la pile sèche. Ann. de Ch. et de Ph. 9. p. 190.

Dessaignes, sur les piles sèches voltaiques. Ann. de Ch. et de Ph. 2. p. 76.

Yelin, Versuche und Beobachtungen zur nähern Kenntniss der Zambonischen Säule. München 1820. 4. Gilb. Ann. 75. p. 201.

Jäger, über die Zambonische Säule und über einige andre trockne elektrische Säulen. Gilb. Ann. 49. p. 47., 50. p. 215., 51. p. 195.

Jäger, Versuche zur Begründung einer Theorie der trocknen Säule. Gilb. Ann. 52. p. 81., 55. p. 369., 62. p. 227.

Munk af Rosenschöld, über Jägers trockne Säulen. Pogg. Ann. 43. p. 193.

Bohnenberger, über elektrische trockne Säulen. Gilb. Ann. 53. p. 346.

Kämtz, über die Elektricität, welche beim Contact animalischer und vegetativer Körper unter sich und mit Salzen entwickelt wird. Schweigger Journ. 56. p. 1. (trockne Säulen aus organischen Substanzen ohne Metalle.)

Disjunctoren.

Sprenger, Anwendung der Galvani-Voltaschen Metallelektricität zur Abhelfung der Taubheit und Harthörigkeit. Gilb. Ann. 11. p. 354. 12. p. 380.

Neef, Beschreibung und Anwendung des Blitzrades. Pogg. Ann. 36. p. 352.

Jacobi, Beschreibung des Commutators. ib. 36. p. 366.

Wagner, Hammerwerk in Neef über einen neuen Elektromotor. Pogg. Ann. 46. p. 104. (Dasselbe wird erreicht durch Ritchies rotirenden Elektromagnet.)

Commutatoren.

Jacobi, Beschreibung des Commutators. Pogg. Ann. 36. p. 366.

Poggendorff, über einige Magnetisirungserscheinungen. Pogg. Ann. 45. p. 353. (Inversor.)

Widerstandsmesser.

Poggendorff, Ann. 52. p. 511. Taf. III. Fig. 1.

Wheatstone, an account of several new instruments and processes for determining the constants of a voltaic circuit. Proceed. of the Rog. Soc. 1843. p. 469.

Jacobi, über einige elektromagnetische Apparate; für Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 54. d. 335.; für feste p. 340.

Jacobi, Beschreibung eines verbesserten Voltagometers. Pogg. Ann. 69. p. 145.

Galvanometer.

Schweigger, Zusätze zu Oersteds elektromagnetischen Versuchen. Schweigg. Journ. 1821. Heft 1. Allgem. Litteraturz. 1. Nov. 1820. Nr. 296. (Entdecknng des Multiplicators.)

Poggendorff, in Ermans Umrissen zu den electrochemischen Magnetismus.

Cumming, on the connexion of galvanism and magnetism. Cambr. Trans. 1821. vol. 1.

Cumming, on the application of magnetism as a measure of electricity. ib. p. 281.

Nobili, confronto dei due galvanometri piu sensibili, la rana ed il moltiplicatore a due aghi, con alcune resultati in fine. Memor. 1. p. 67. bill. unio. 37. p. 10. (Doppelnadel.)

Nobili, descrizione d'un nuovo galvanometro. Mem. 1. p. 1.

Nörrenberg, über die von Colladon beobachtete Ablenkung der Magnetnadel durch Reibungselektricität. Baumg. Journ. 3. p. 257. (die Doppelnadel in den beiden Windungen einer Schleife.)

Marianini, ein neuer galvanischer Multiplicator. Baumg. Journ. 4. p. 42.

Fechner, Beschreibung eines galvanischen Messapparats. Schweigg. Journ. 57. p. 1. (Multiplicator aus eine Lamelle.)

Brouwer, ovec eene verbetering angebragt aan den multiplicator van Schweigger, en het magnetiseren door zwaakke thermo-

elektrische stroomen. Natuur en Scheik. Archief 1835. p. 147.

Locke, Sillim. Amer. Journ. 26. p. 103. 378. (die Drathwindungen parallele Sehnen eines Kreises.)

Nervander, mémoire sur un galvanomètre à chassis cylindrique, par lequel on obtient immediatement et sans calcul la mesure de l'intensité du courant électrique qui produit la déviation de l'aiguille aimantée. Ann. de Chem. et de Ph. 55. p. 156. (Tangentenbussole.)

Lenz, über die Gesetze der Wärmeentwickelung durch den galvanischen Strom. Pogg. Ann. 59. p. 203. (Beschreibung der verbesserten Nervanderschen Tangentenbussole.)

Melloni, sur un moyen nouveau de faire varier à volonté la sensibilité des galvanomètres astatiques, et de la rendre aussi parfaite que le comporte la nature des métaux employés dans leur construction. Arch. de l'élect. 1. p. 656.

Theorie des Multiplicators.

Ohm, experimentale Beiträge zu einer vollständigen Kenntniss des electromagnetischen Multiplicators. Schweigg. Journ. 55. p. 1.

Kaemtz, Schweigg. Journ. Phil. Mag. 62. p. 441.

Fechner, Lehrbuch des Galvanismus. p. 219.

Fechner, über die Vortheile langer Multiplicatoren nebst einigen Bemerkungen über den Streit der chemischen und der Contacttheorie des Galvanismus. Pogg. Ann. 45. p. 232.

Galvanometrische Messmethoden.

Nobili, sur la mesure des courants électriques ou projet d'un galvanomètre comparable. Ann. de Ch. et de Ph. 43. p. 146. Mem. 1. p. 105.

Becquerel, Traité de l'électricité II. p. 24.

Melloni, Pogg. Ann. 35. p. 132.

Peltier, mémoire sur la formation des tables des rapports, qu'il y a entre la force d'un courant électrique et la déviation des aiguilles des multiplicateurs, suivi de recherches sur les causes de perturbation des couples thermo-éléctriques et sur les moyens de s'en garantir dans leur emploi à la mesure des temperatures moyennes. Ann. de Ch. et de Ph. 71. p. 225.

Petrina, zur Galvanometrie. Pogg. Ann. 57. p. 111.

Poggendorff, von dem Gebrauch des Galvanometers als Messwerkzeug. Pogg. Ann. 56. p. 324.; 57. p. 609.

Sinusbussole.

Pouillet, Élémens de physique 3. ed. I. p. 611.

Poggendorff, über die Einrichtung und den Gebrauch einiger Werkzeuge zum Messen der Stärke elektricher Ströme und der denselben bedingenden Elemente. Pogg. Ann. 50. p. 504.

Tangentenbussole.

Pouillet, Élémens de physique 3. ed. I. p. 613.

Galvanoskòpe verschiedener Construction.

Cumming, on the use of goldleaf as a test of electromagnetism. Ann. of Phil. 1824. p. 321. (Anziehuug des Leiters durch den Magnet.)

Dove, Pogg. Ann. 28. p. 586. (Anziehung der Mitte des Magneten durch den eine Schleife bildenden Leiter.)

Roget, Galvanism. p. 44. (Anziehung des Poles der Nadel durch die Mitte einer ebenen Spirale.)

v. Wrede, Pogg. Ann. 42. p. 308. (gekrümmter Magnet hineingezogen in eine gekrümmte cylindrische Spirale.)

Becquerel, Beschreibung und Gebrauch des elektromagnetischen Wage und der Säule von constanten Strömen. Compt. rend. 4. p. 35. Pogg. Ann. 42. p. 307.

Hachette, Pogg. Ann. 27. p. 560. (die Magnetnadel angezogen von einem entstehenden Elektromagnet.)

Ladungssàule.

Ritter, Versuche und Bemerkungen über den Galvanismus. Voigt's Magazin 6. p. 97.

11) Wärmeentwickelung.

Children, an account of some experiments with a large voltaic battery. Phil. Trans. 1815. p. 363.

Biot, über die Bewegung des galvanischen Fluidums. Gilb. Ann. 10. p. 24.

Wollaston, elementary galvanic battery. Thoms. Ann. of Ph. 6. p. 209. Gilb. Ann. 52. p. 355.

H. Davy, further researches on the magnetic phenomena produced by electricity; with some new experiments on the properties of electrified bodies in their relations to conducting powers and temperature. Ph. Tr. 1821. p. 425.

Roberts, on the application of galvanism to the blasting of roks. Mem. of the Electr. Soc. 1. p. 77.

Murray, Edinb. Phil. Journ. 14. p. 57.

Joule, on the heat evolved by metallic conductors of electricity and in the cells of a battery during electrolysis. Sturg. Ann. of El. 8. p. 287. Arch. de l'électr. 2. p. 54.

Joule, on the electric origin of the heat of combustion. ib. 8. p. 302. Arch. de l'électr. 2. p. 80.

Joule, on the calorific effects of magneto-electricity and on the mechanical value of heat. Lond. and. Ed. Ph. Mag. 23. p. 276. 347.

Ohm, theoretische Herleitung der Gesetze, nach welchen sich das Erglühen von Metalldräthen durch die galvanische Kette richtet, und nähere Bestimmung der Modificationen, die der elektrische Strom durch Spitzen erleidet. Kast. Arch. 16. p. 1.

Lenz, über die Gesetze der Wärmeentwickelung durch den galvanischen Strom. bullet. de l'Acad. Imp. des sc. de St. Pétersb. 1843. Tom. I. Nr. 14. 15. 16. Pogg. Ann. 59. p. 203. 407.

de la Rive, recherches sur les effets calorifiques de la pile. Ann. de Ch. et de Ph. 40. p. 371. Pogg. Ann. 15. p. 257.

de la Rive, mémoire sur les effets de température qui accompagnent la transmission dans les liquides, au moyen de divers électrodes, des courants électriques, soit continus, soit discontinus et alternatifs. Arch. de l'électr. 3. p. 175.

Becquerel 2, des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides. Arch. de l'électr. 3. p. 181.

Funken.

van Marum, über die Versuche mit der elektrischen Säule. Gilb. Ann. 10. p. 121. (Funken auf Quecksilber.)

Crosse, on the tension spark from the voltaic battery. Lond. and Ed. Ph. Mag. 17. p. 215.

Gassiot, spark before the circuit of the voltaic battery is completed. Ph. Tr. 1840. p. 183.

Jacobi, über den galvanischen Funken. Pogg. Ann. 44. p. 633.

Draper, Lond. and Ed. Phil. Mag. 15. p. 349. (kein Funke der Kette in der Toricellischen Leere.)

Noad, description de quelques expériences faites an moyen d'une pile chargée avec de l'eau pure. Arch. de l'électr. 2. p. 231.

Marianini, bibl. univ. 1831. p. 283. (Funken in Flüssigkeiten.)

Leuchtender Bogen zwischen Kohlenspitzen.

H. Davy, elements of chemical philosophy. p. 152.

de la Rive, notice sur quelques expériences faites avec une forte pile de Grove. Arch. pe l'électr. 1. p. 262.

Daniell, on voltaic combinations; with some account of the effects of a large constant battery. Ph. Tr. 1839. p. 89.

12) Elektroskopische Erscheinungen.

Jäger, über die elektroskopischen Aeusserungen der Voltaschen Platten und Säulen. Gilb. Ann. 13. p. 399.

Ohm, Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen. Pogg. Ann. 6. p. 459., 7. p. 45. 117.

Bischoff, über einige auffallende Wirkungen der Voltaschen Säule auf den Elektrometer und über die Leitungsfähigkeit des Glases und andrer Isolatoren. Schweigg. Journ. 35. p. 29.

Fechner, über die elektrische Intensität der isolirten Säule. Pogg. Ann. 44. p. 44.

Marianini, mémoire sur la perte de tension qu' éprouvent les appareils voltaiques, quand on teint le circuit fermé, et sur la manière, dont ils recouvrent leur tension primitive, quand on suspend la communication entre leurs poles. Ann. de Ch. et de Ph. 38. p. 337.

Erman, über die elektroskopischen Phaenomene der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 8. p. 197.

Erman, über die elektroskopischen Phaenomene des Gasapparates an der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 10. p. 1.

Ritter, Versuche mit einer Volta'schen Säule von 600 Lagen. Gilb. Ann. 13. p. 6. 14.

Biot, Untersuchungen über den Einfluss der Oxydation auf die Wirkungen von Voltas elektrischer Säule. Gilb. Ann. 15. p. 90. bull. des scienc. Nr. 76. p. 120.

Marechaux, Versuche über die anziehende Kraft der Voltaschen Säule und deren Ausmessung durch den Elektromikrometer. Gilb. Ann. 19. p. 476.

Elektrochemische Bewegungen. (Helwigscher Strom.)

Erman, Wahrnehmungen über gleichzeitiges Entstehen von mechanischer Cohärenz und chemischer Verwandtschaft. Gilb. Ann. 32. p. 261.

Herschel, on certain motions produced in fluid conductors when transmitting the electric current. Ph. Tr. 1824. p. 162. Schweigg. Journ. 48. p. 246.

Pfaff, über galvanische elektrische Strömungen als Ursachen von merkwürdigen Bewegungen im Quecksilber und verschiedenen Flüssigkeiten unter bestimmten Bedingungen. Schweigg. Journ. 48. p. 190.

Serullas, lettre concernant la notice historique publiée par Mr. Davy sur les phénomènes électro-chimiques. Ann. de Ch. et de Ph. 34. p. 192. Journ. de phys. 91. p. 190., 93. p. 115.

Nobili, sur les apparences et les mouvements électro-chimiques du mercure. bibl. univ. 39. p. 261.

Nobili, nuove osservazioni sopra le apparenze elettro-chimiche, le leggi elettro-dinamiche ed il meccanismo interno della pila Mem. p. 56.

Prandi, sui movimenti del mercurio. Bologna 1826.

Runge, sonderbare Bewegungen in die gewisse Metalsalze unter Umständen versetzt werden können. Pogg. Ann. 8. p. 106., 9. p. 479., 15. p. 95., 16. p. 129. 304., 17. p. 472.

Porret, ein merkwürdiger galvanischer Versuch. Thoms. Ann. of Phil. 8. p. 74. Gilb. Ann. 66. p. 272. (Durchdringung der Blase durch die Flüssigkeit vom positiven Pol aus.

de la Rive, Ann. de Ch. et de Ph. 28. p. 196.

Wollaston, über den Einfluss der Elektricität auf thierische Secretionen. Gilb. Ann. 36. p. 3. 244.

Ladung der Leidner Flasche durch galvanische Säulen.

Volta, Brief 1801. Gilb. Ann. 9. p. 379. 489.; 12. p. 499.

Volta, Versuche über die Ladung elektrischer Batterien durch den elektro-motorischen Apparat. Brief an Gilbert. Gilb. Ann. 13. p. 257.

van Marum und Pfaff, Versuche mit der elektrischen Säule. Gilb. Ann. 10. p. 121.

Ritter, Versuche mit einer Voltaschen Zink-Kupferbatterie von 600 Lagen. Gilb. Ann. 13. p. 1.

Jacobi, über die Zeit zur Entwickelung eines elektrischen Stromes. Pogg. Ann. 45. p. 281.

Spannungsreihe der Körper.

Ritter, das elektrische System der Körper. Leipzig 1805. 8. 412 S.

Ritter, über die Spannungsreihe der Leiter und über die Stelle des Palladiums und andrer Metallgemische in ihr. Gilb. Ann. 16. p. 293.

Volta, über die sogenannte galvanische Elektricität. Ann. de Ch. 40. p. 225—256. Gilb. Ann. 10. p. 436. Ritters Beiträge II. St. 3. 4.

Heidmann, Eintheilung der festen und flüssigen Leiter einer galvanischen Kette nach dem Grade ihrer galvanischen Action und ihres chemischen Wirkungsvermögens. Gilb. Ann. 21. p. 55.

Pfaff, neues Gehler'sches Wörterbuch. G. p. 604. 633.

Poggendorff, Isis 1821. p. 706.

Smee, on the galvanic properties of the elementary bodies and on the amalgamation of zink. Lond. and. Ed. Ph. Mag. 16. p. 422.

H. Davy, on the relations of electrical and chemical changes. Ph. Tr. 1826. p. 408.

H. Davy, on some chemical agencies of Electricity. Ph. Trans. 1807. p. 1. Gehlen Journ. d. Ph. u. Chem. 8. p. 82.

H. Davy, Elements of chemical philosophy. p. 148.

Becquerel, des actions electromotrices produites par le contact des métaux et des liquides et d'un procédé, pour reconnaître à l'aide des effets électromagnetiques les changements qu'éprouvent certaines dissolutions au contact de l'air. Ann. de Ch. et de Ph. 25. p. 405.; 23. p. 244.; 24. p. 191.

Becquerel, developpement relatif aux effets électriques observés dans les actions chimiques et de la distribution de l'électricité

dans la pile de Volta, en tenant compte des actions électro-motrices des liquides sur les métaux. ib. 26. p. 176.

Becquerel, des actions électro-motrices de l'eau et des liquides en général sur les métaux, des effets electriques qui ont lieu dans le contact de certaines flammes et des métaux et dans la combustion. ib. 27. p. 5. Pogg. Ann. 2. p. 191.

Pfaff, Revision der Lehre vom Galvano-Voltaismus.

Pfaff, über und gegen die Entwicklung der Elektricität durch den chemischen Process, nebst einem Anhange von Versuchen über das elektro-motorische Verhalten vieler Flüssigkeiten gegen Metalle. Pogg. Ann. 51. p. 110.

Henrici, über die Elektricität der galvanischen Kette. Göttingen 1840.

Fechner, über die Becquerelsche Kette und Electricitätserregung durch gegenseitige Berührung von Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 48. p. 1. 225.

Marianini, elektrische Versuche. Schweigg. Journ. 49. p. 48.

Pohl, der Process der galvanischen Kette. Leipzig 1826. p. 14.

Fox, note on the electrical relations of certain metalls and metalliferous minerals. Ph. Tr. 1835. p. 39.

Leitungsfähigkeit der festen Körper.

Oersted, über die Art wie sich die Elektricität fortpflanzt. Gehl. Journ. 6. p. 292.

Lehot, ordre dans lequel les métaux sont classés comme conducteurs de l'électricité. Ann. de Ch. 37. p. 285.

H. Davy, further researches on the magnetic phenomena produced by electricity, with some new experiments on the properties of electrified bodies in their relations to conducting powers and temperature. Phil. Trans. 1821. p. 425. (die Leitungsfähigkeit der Metalle wird durch Temperaturerhöhung vermindert.)

Becquerel, du pouvoir conducteur de l'électricité dans les métaux et de l'intensité de la force électro-dynamique en un point quelconque d'un fil métallique qui joint les deux extrémités d'une pile. Ann. de Ch. et de Ph. 32. p. 420. (durch Compensation.) Pogg. Ann. 12. p. 280.

Barlow, on the electromagnetic conducting power of wires of different qualities and dimensions into the efficacy of the gal-

vanometer, for determining the laws of its variation. Lond. and Ed. Ph. Mag. 11. p. 1.

Pouillet, Élemens de Physique II. ed. 2. p. 315.

Ohm, über die Leitungsfähigkeit der Metalle für Elektricität Schweigg. Journ. 44. p. 110. 245. 370.

Cumming, Cambridge Transaet. 1823. p. 63.

Christie, experimental determination of the laws of magneto-electric induction in different masses of the same metal, and of its intensity in different metals. Phil. Trans. 1833. p. 95.

Snow Harris, on the relative powers of various metallic substances as conductors of electricity. Ph. Tr. 1827. p. 18. (durch das elektrische Thermometer.)

Babbage and Herschel, account of the repetition of Mr. Aragos experiments on the magnetism manifested by various substances during the act of rotation. Ph. Tr. 1825. p. 476. (durch Rotationsmagnetismus.)

Lenz, über die Leitungsfähigkeit der Metalle für die Elektricität bei verschiedenen Temperaturen. Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. 1833. Pogg. Ann. 34. p. 418. (durch Induction.)

Lenz, über die Leitungsfähigkeit des Wismuths, Antimons und Quecksilbers. Pogg. Ann. 44. p. 345.

Lenz, über die Leitungsfähigkeit des Goldes, Bleies und Zinns für die Elektricität bei verschiedenen Temperaturen. Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. 1836. Pogg. Ann. 45. p. 105.

Riess, über die elektrische Verzögerungskraft und das elektrische Erwärmungsvermögen der Metalle. Pogg. Ann. 45. p. 1. (vermittelst des elektrischen Thermometers.)

Pelletier, über das elektrische Leitungsvermögen der Mineralien. Gilb. Ann. 46. p. 198.

Pristley, experiments and observations on charcoal. Ph. Tr. 1770. p. 211. (Leitungsfähigkeit der Kohle nachgewiesen.)

Fechner, über die elektrische Reihenfolge der Hölzer. Kastn. Arch. 9. p. 284.

Kemp, Edinb. n. Phil. Journ. 1829. p. 344. Schweigg. Journ. 55. p. 448. (Leitungsfähigkeit der Kohle beim Verbrennen gesteigert.)

Fox, on the electromagnetic properties of metalliferous veins in the mines of Cornwall. Ph. Tr. 1830. p. 399. (Leitungsfähigkeit verschiedener Mineralen.)

Ritter, Versuche über das Verhalten mehrerer Mineralkörper im Kreise der Voltaischen Säule. Gehlen Journ. der Ch. u. Ph. 6. p. 568.

Lenz, über den Leitungswiderstand des menschlichen Körpers gegen galvanische Ströme. Pogg. Ann. 56. p. 429.

Erman, über die Fähigkeit der Flamme der Knochen und des luftleeren Raumes die Wirkungen der Voltaschen Säule zu leiten. Gilb. Ann. 11. p. 144. (Eis isolirt.)

Leitung der Flüssigkeiten.

Beccaria, electricismo artificiale e naturale. p. 113. (Einfluss des Queerschnitts.)

Faraday, on a new law of electric conduction. Experiment Research. 4. series 380. Ph. Tr. 1833. p. 507. Pogg. Ann. 31. p. 225. (Feste Isolatoren werden leiternd durch Schmelzen.)

Förstemann, Versuche über das Leitungsvermögen verschiedener Flüssigkeiten für die Elektricität der Säule. Kastn. Arch. 4. p. 82.

Pfaff, über das Leitungsvermögen verschiedener saurer, alkalischer und salziger Flüssigkeiten. Schweigg. Journ. 55. p. 258.

Marianini, saggio di esperienze ellettrometriche. Ven. 1828.

Bigeon, Ann. de Ch. et Ph. 46. p. 85.

Fechner, Maasbestimmungen über die galvanische Kette. Leipz. 1831. 260 S. 4. (die Ohm'schen Sätze bei Flüssigkeiten nachgewiesen.)

Vergleich der Leitung der Flüssigkeiten und Metalle.

Cavendish, some attempts to imitate the effects of the torpedo by electricity. Ph. Tr. 1776. p. 196.

Volta, fortgesetzte Versuche über die Elektricität. Gilb. Ann. 14. p. 263.

Pfaff, der Elektromagnetismus. p. 83.

Pouillet, Compt. rend. 5. p. 785. Pogg. Ann. 42. p. 298.

Unipolarität.

Erman, über die fünffache Verschiedenheit der Körper in Rücksicht auf galvanisches Leitungsvermögen. Gilb. Ann. 22. p. 14.

Configliachi u. Brugnatelli, über die elektrischen Leiter bei der Voltaschen Säule oder über die sogenannten galvanischen Leiter. Brugn. Giorn. 1. p. 147—163, 338—353. Gehlen Journ. f. Ch. u. Ph. 8. p. 319.

Biot, Traité de physique. 2. p. 547.

Andrews, on the conducting power of certain flames and of heated air for electricity. Lond. and Ed. Ph. Mag. 9. p. 176. Pogg. Ann. 43. p. 310.

Ohm, Versuche zur nähern Bestimmung der Natur unipolarer Leiter. Schweigg. Journ. 59. p. 385., 60. p. 32.

Prechtl, Untersuchungen über die Modificationen des elektrischen Ladungszustandes mit Bezug auf die Gründe der von Hrn. Erman entdeckten Verschiedenheit einiger Substanzen in Betreff ihres galvanischen Leitungsvermögens. Gilb. Ann. 35. p. 28.

Erman, über eine eigenthümliche reciproke Wirkung der zwei entgegengesetzten elektrischen Thätigkeiten. Abh. d. Berl. Ac. 1818. p. 351.

Becquerel, considerations générales sur les changements qui s'opèret dans l'état électrique des corps par l'action de la chaleur, du contact, du frottement et de diverees actions chimiques. Ann. de Ch. et de Ph. 46. p. 283.

Erscheinungen der Nebenschliessung.

Pohl, über das polare Verhalten der Flüssigkeit in der galvanischen Kette. Pogg. Ann. 16. p. 101.

Pohl, zur Theorie des Galvanismus mit Bezug auf Pfaff's Bemerkung über Pohl's Versuch der abwechselnden Polarität einer galvanischen Kette mit mehreren paarweise vorbundenen Zwischenplatten. Pogg. Ann. 46. p. 595.

Pfaff, über die Erscheinungen der sogenannten Ladungssäule mit besondrer Beziehung auf die Voltasche Theorie der Voltaschen Kette und Säule. Pogg. Ann. 49. p. 461.

Pohl, Versuche über das Verhalten alternirend geschichteter Ketten. Pogg. Ann. 50. p. 497.

Henrici, zur Galvanometrie. Pogg. Ann. 53. p, 277.

Daniell, Voltaic Combinations. Ph. Tr. 1837. p. 141.

Poggendorff, über ein Phaenomen der Durchkreuzung elektrischer Ströme. Pogg. Ann. 55. p. 511.

Eingeschaltete Platten.

de la Rive, sur quelques-uns des phénomènes que présente l'électricité voltaique dans son passage à travèrs les conducteurs liquides. Ann. de Ch. et de Ph. 28. p. 190.

de la Rive, recherches sur une propriété particulière des conducteurs métalliques de l'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. 36. p. 34.

Pohl, über das polare Verhalten der Flüssigkeit in der galvanischen Kette. Pogg. Ann. 16. p. 101.

Fechner, Maasbestimmungen. Versuch 79—83.

Buff, über den Einfluss der Zwischenplatten in der galv. Kette. Pogg Ann. 54. p. 503.

Durchkreuzen der Ströme.

Marianini, sur une analogie qui existe entre la propagation de la lumière et celle de l'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. 42. p. 131.

Physiologische Wirkungen.

Galvani, de viribus electricatis in motu musculari commentatio Bonon. 1791. 4.

Galvani, Abhandlung über die Kräfte der thierischen Elektricität auf die Bewegung der Musceln nebst einigen Schriften der Hrn. Valli, Carminati und Volta über eben diesen Gegenstand übers. v. Mayer. Prag 1793. 8.

Galvani, memoria sull elettricita di Galvani al cel. Ab. Spalanzani. Aggiunti alcune experienze di Aldini Bologn. 1797. 4.

Volta, scoperta del Sign. Galvani e confronte di essa colle cognizioni che finora si avenano intorno all elettricita animale. Brugn. Giorn. fisico medico. 2. p. 146. 241. 1793. Opera 1. p. 63.

Volta, account of some discoveries made by Mr. Galvani of Bologna, with experiments and observations of them. Ph. Tr. 1793. p. 10.

Aldini, de animali electricitate dissertationes duae. Bon. 1794. 4.

Wells, observations on the influence, which incites the muscles of animals to contract in Mr. Galvanis experiments. Ph. Tr. 1795. p. 246.

Monro, experiments on the nervous system. üb. Leipzig 1796.

Forster, experiments and observations relative to the influence lately discovered by Mr. Galvani and commonly called animal electricity. Edinb. a London 1793. 8. deutsch. Leipz. 1796. 8.

Compte rendu a la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut national des premières expériences faites en Floreal et Prairial l'an 5 par la commission nommée pour examiner et verifiier les phénomènes du Galvanisme. 4. Paris. 101 S. übersetzt in Ritters Beiträgen I. p. 1—110.

Pfaff, über thierische Elektricität und Reizbarkeit. Leipz. 1795.

Ritter, Beweiss, dass ein beständiger Galvanismus den Lebensprocess im Thierischen begleitet nebst neuen Bemerkungen und Ursachen über den Galvanismus. Weimar 1798. 8. 174 S.

Alexander v. Humboldt, Versuche über die gereizte Muskel und Nervenfaser nebst Vermuthungen über den chemischen Process des Lebens. Posen und Berlin 1797. 8. 2. vol.

Reinhold, specimen I et II. de galvanismo. Leip. 1797. 98. 4.

Ritter, physisch-chemische Forschungen in chronologischer Folge I. p. 43—58., 59—90., 125—134.

Ritter, neue Modificationen der Nervenerregbarkeit durch Galvanismus. Gehlen Journ. d. Chem. u. Phys. 6. p. 421.

Ritter, Beiträge zur nähern Kenntniss des Galvanismus und der Resultate seiner Untersuchung. Jena 1800. 8. 3. vol.

Aldini, esperienze sul galvanismo. Bologne 1802. 8.

Nysten, nouvelles expériences galvaniques 1803.

Aldini, essai théorique et expérimental sur le galvanisme. Paris 1804. 2. vol. 4. (Versuche mit Hingerichteten.)

Kunze, einige Bemerkungen über den Galvanismus in physicher, chemischer und medicinischer Hinsicht. Hamburg 1804. 8.

Ritter, pseudogalvanische Versuche. Gehlen Journ. d. Ph. u. Ch. 6. p. 431.

Ritter, Wirkung der galvanischen Batterie auf die verschiedenen Sinne des Menschen beim Eintritt, Seyn und Austritt in und aus der Kette jener. Beiträge I. st. 4. p. 290. II. st. 2 u. 3.

Erman, Versuch einer Zurückführung der mannigfaltigen Erscheinungen elektrischer Reizung auf einen einfachen chemisch physischen Grundsatz. Abh. d. Berl. Acad. 1812. p. 155.

Marianini, mémoire sur la secousse qu' éprouvent les animaux, ou ils cessent de servir d'arc de communication entre les pôles d'un electro-moteur. Ann. de Ch. et de Ph. 40. p. 255.

Marianini, note sur un phénomêne physiologique produit par l'électricité. ib. 43. p. 320.

Nobili, analyse expérimentale et théorique des phénomènes physiologiques produits par l'électricité sur la grenouille; avec un appendice sur la nature des tetanos et de la paralysie, et sur les moyens de traiter ces deux meladies par l'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. 44. p. 60.

Nobili, comparaison entre les deux galvanomètres les plus sensibles la grenouille et le multiplicateur a deux aiguilles. ib. 38. p. 225. Pogg. Ann. 14. p. 157.

(Siehe auch die allgemeinen physiologischen Werke.)

Besondre Theorien des Galvanismus.

Reinhold, Versuche um die eigentliche Grundkette der Voltaschen Säule auszumitteln. Gilb. Ann. 10. p. 301.

Reinhold, Untersuchungen über die Natur der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 10. p. 450.

Erman, Versuch einer physischen Theorie der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 11. p. 89.

Jäger, über einige Schwierigkeiten in Volta's Theorie der elektrischen Säule und was diese Theorie noch zu leisten hat. Gilb. Ann. 23. p. 59.

Ritter, das elektrische System der Körper. Leipzig 1805.

Pohl, Versuche und Bemerkungen über die polare Thätigkeit flüssiger Leiter. Kastn. Arch. 2. p. 168., 3. p. 1. 257., 6. p. 425.

Förstemann, über die Polarität flüssiger Leiter. Kast. Arch. 6. p. 430.

Pohl, der Process der galvanischen Kette. Berlin. 8.

Pohl, Ansichten und Ergebnisse über Magnetismus, Elektricität und Chemismus. Berlin 1829. 8. 83 S.

Pfaff, gegen Pohl's Theorie der elektrischen Erscheinungen. Kast. Arch. 10. p. 71. 273., 11. p. 393.

Pohl, Erwiederung. 11. p. 145., 12. p. 257.

Friese, theoria galvanismi. Bonn 1842. 8.

(Hand- und Lehrbücher über Galvanismus überhaupt weiter unten unter Handbüchern über Elektricität im Allgemeinen.)

IV. Thierische Elektricität.

Allgemeine Werke.

Matteucci, essai sur les phénomènes électriques des animaux. Paris 1840. 8. 88 S.

du Bois, vorläufiger Abriss einer Untersuchung über den sogenannten Froschstrom und über die elektromotorischen Fische. Pogg. Ann. 58. p. 1.

Geoffroy, mémoire sur l'anatomie comparée des organes électripues de la Raie torpille, du gymnotus engourdissant et du silure trembleur. Mém. du Musée d'Historie natur. 1. p. 392.

Rudolphi, über die elektrischen Fische. Abh. der Berl. Acad. 1820. 21. p. 223.

Langguth, opuscula historiam naturalem spectantia. Wittenb. 1784. 4.

du Bois, quae apud veteres de piscibus electricis exstant argumenta. Berl. 1843. 8.

Matteucci, sur les phénomènes électro-physiologiques des animaux. Paris.

Gymnotus.

Langguth, de torpedine recentiorum genere anguilla. Witt. 1788. 4.

Gronow, descriptio gymnoti tremuli. Act. Helv. 1760. p. 26.

Williamson, an account of the gymnotus electricus. Ph. Tr. 65. p. 94.

Garden, an account of the gymnotus electricus. Ph. Tr. 65. p. 102.

John Hunter, an account of the gymnotus electricus, Ph. Tr. 1775. p. 395.

A. v. Humboldt, sur les gymnotes et autres poissons électriques. Ann. de Ch. et de Ph. 11. p. 408.

Giusan, de gymnoto electrico. Tübingen 1819.

Faraday, notice on the character and direction of the electric force of the gymnotus. Experim. Research. in Elect. 15 ser. Ph. Tr. 1839. p. 1. Pogg. Ann. Erg. p. 385.

Schönbein, observations sur les effets électriques du gymnote. Arch. de l'élect. 1. p. 445.

Torpedo.

Langguth, de torpedine veterum genere raja. Witt. 1784. 4.

Broussonet, mémoire sur le trembleur espèce peu connu de poissons électriques. Mém. de Par. 1792. p. 692.

Hunter, anatomical observations on the torpedo. Ph. Tr. 63. p. 481.

Spalanzani, Opusc. Scell. di Milano 1783. Soc. Ital. 2. p. 603.

Girardi, saggio di osservazioni anatomiche intorno agli organi electrici della torpedine. Soc. Ital. 3. p. 553.

Réaumur, des effets que produit le poisson appelé en François Torpille ou Tremble sur ceux, qui le touchent et de la cause dont ils dependent. Mém. de Paris 1714. p. 344.

Walsh, on the electric property of the torpedo. Ph. Tr. 63. p. 461., 64. p. 464.

Ingenhouss, extract of a letter containing some experiments on the torpedo, made at Leghorn. Jan. 1. 1773. Ph. Tr. 66. p. 1

Volta, lettera sopra esperienze ed osservazioui da intraprendersi sulla torpedine. Brugnat. Ann. di Ch. 1805. t. 22. p. 223—248.

Configliachi, riposta al Prof. Volta. ib. p. 249. Gehl. Journ. 4. p. 647-

Cavendish, some attempts to imitate the effects of the torpedo by electricity. Ph. Tr. 1776. p. 196.

Aldini, sur les organes des poissons électriques rapportés à la théorie du galvanisme. Essai sur le galvan. II. p. 61.

A. v. Humboldt et Guy-Lussac, expérience sur la torpille. Ann. de Ch. 56. p. 15.

H. Davy, an account of some experiments on the torpedo. Ph. Tr. 1829. p. 15.

H. Davy, an account of some experiments on the torpedo. Ph. Tr. 1832. p. 259.

J. Davy, observations on the torpedo, with an account of some additional experiments on its electricity. Ph. Tr. 1834. p. 531.

Colladon, expériences sur l'électricité de la torpille. Compt. rend. 1836. II. p. 490. Pogg. Ann. 39. p. 411.
Linari, in Matteucci lettre à Mr. Arago. Compt. rend. 1836. II. p. 46.
Matteucci, essai sur les phénomènes electriques des animaux.
Matteucci, sur l'électricité animale. Arch. de l'électr. 3. p. 153.

Zitterwels (Silurus electricus).

Rudolphi, über den Zitterwels. Abh. d. Berl. Acad. 1824. p. 137.

Elektricität in andern Thieren als elektrischen Fischen.

Galvani, de viribus electricitatis in motu musculari commentatio. Bon. 1791. 4.
Aldini, essai sur le galvanisme. 2 vol. 8.
Nobili, esperienze elettro-fisiologische. Mém. 1. p. 7.
Nobili, analisi sperimentale e teorica degli effetti elettro-fisiologici della rana. Mém. 1. p. 135. bibl. univ. 37. p. 10., 44 p. 48.
Matteucci, essai sur les phénomènes électriques des animaux. p. 74.
Matteucci, recherches sur le courant propre de la grenouille et des animaux a sang chaud. Arch. de l'élect. 2. p. 419.
Matteucci, de l'existence et des lois du courant électrique musculaire dans les animaux vivants ou recemment tués. Arch. de l'élect. 3. p. 5.
Matteucci, sur un phénomène physiologique produit par les muscles en contraction. Arch. de l'élect. 2. p. 628.
Prevost, sur quelques expériences relatives à l'électricité animale. ib. 2. p. 633.
du Bois, vorläufiger Abriss einer Untersuchung über den sogenannten Froschstrom und über die elektro-motorischen Fische. Pogg. Ann. 58. p. 1.

V. Thermoelektricität.

Seebeck, über die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz. Abh. der Berl. Acad. 1822. (Entdeck. d. Gebietes.) Pogg. Ann. 6. p. 1. 133. 253.

Yelin, der Thermomagnetismus der Metalle. Gilb. Ann. 73. p. 415. 432.

Yelin, der Thermomagnetismus in einer Reihe neuer elektro-magnetischer Versuche dargestellt. München 1823. Apr. 4.

Cumming, on the developpement of electro-magnetism by heat. Cambr. Trans. 2. p. 1.

Becquerel, du pouvoir thermoelectrique des métaux. Ann. de Ch. et de Ph. 41. p. 353.

Becquerel, du développement de l'électricité par le contact de deux portions d'un même métal suffisamment inégal de temperature. ib. 23. p. 135.

Sturgeon, on the thermomagnetism of homogeneous bodies with illustrative experiments. Phil. Mag. 1831. v. 10. [illegible] 116.

Becquerel, recherches sur les effets électriques de contact produits dans les changements de température et application qu'on peut en faire à la détermination des hautes températures. Ann. de Ch. et de Ph. 31. p. 371.

Becquerel, considérations générales, sur les changements qui s'opèrent dans l'état électrique des corps par l'action de la chaleur, du contact, du frottement et de divers actions chimiques. Ann. de Ch. et de Ph. 44. p. 265. 337., 47. p. [illegible]13., 49. p. 131.

Pouillet, mémoire sur le mesure relative des sources thermoélectriques et hydroéletriques. Compt. rend. 5: p. 785. Pogg. Ann. 42. p. 297.

Pouillet, recherches sur les hautes temperatures et sur plusieurs phénomènes qui en dependent. Compt. rend. 1836. p. 782. Pogg. Ann. 39. p. 567.

Prideaux, experimental contributions towards the theory of thermoelectricity. Lond. and Ed. Ph. M. 3. p. 205. 262. 398.

Andrews, on the thermoelectric currents between metals and fused salts. Lond. and Ed. Ph. Mag. 10. p. 433.

Watkins, on thermoelectricity. ib. 11. p. 304. Pogg. Ann. 42. p. 589.

Wheatstone, on the thermoelectric spark. ib. 10. p. 414. Pogg. Ann. 41. p. 160.

Linari, Compt. rend. 1836. II. p. 46. (Erste Beobachtung des Funkens.) Pogg. Ann. 40. p. 642.

Botto, sur l'action chimique des courants thermoélectriques. bibl. univ. 51. p. 337. Pogg. Ann. 28. p. 238.

Zantedeschi, ricerche sul thermoelettrismo dinamico luce magnetico ed elettrico. Mil. 1838. 8. 72 S.

Griebel, de relatione actionum caloris et electricitatis. Berol. 1837. 4.

Wrede, Ursächliches der Thermoelektricität. Pogg. Ann. 55. p. 175.

Matteucci, über die thermoelektrischen Ströme des Quecksilbers. bibl. univ. nouv. Ser. 15. p. 187. Poggend. Ann. 47. p. 600.

Vorsselmann de Heer, über die thermoelektrische Wirkung des Quecksilbers. Pogg. Ann. 47. p. 602., 49. p. 114.

Matteucci, observations sur un mémoire de Mr. Vorsselmann de Heer relatif à des expériences thermoélectriques. Arch. de l'élect. 2. p. 227.

Thermosäule.

Oersted et Fourier, sur quelques nouvelles expériences thermoélectriques. Ann. de Ch. et de Ph. 22. p. 375.

Nobili, sulle pile a forza constante. Mem. 1. p. 134.

Nobili, termo-moltiplicatore ossia termoscopio elettrico. Mem. 1. p. 157.

Nobili et Melloni, recherches sur plusieurs phénomènes calorifiques entreprises an moyen du thermo-multiplicateur. Mem. 1. p. 195. Ann. de Ch. et de Ph. 48. p. 198.

Nobili, Pile per il termo-moltiplicatore, a scatola, a specchi conici e sferici, a canocchiale, a raggi concentrici, a pettine. Mem. 2. p 44—50.

Melloni, Beschreibung eines Apparats zur Anstellung aller Versuche über die strahlende Wärme. Inst. 89. p. 22. Pogg. Ann. 35. p. 559.

Dove, Beschreibung einer Thermosäule für constante Ströme. Pogg. Ann. 44. p. 592.

Poggendorff, neue thermoelektrische Kette. Pogg. Ann. 50. p. 250.

Svanberg, über die vortheilhafteste Construction thermoelektrischer Apparate. Pogg. Ann. 56. p. 422.

Solly, description d'un thermomètre électrique. Arch. de l'életr. 1. p. 665.

Kälteerregung durch den Strom.

Peltier, nouvelles expériences sur la caloricité des courants électriques. Ann. de Ch. et de Ph. 56. p. 371. Pogg. Ann. 44. p. 342.

Moser, Repertorium I. p. 353.

Lenz, über Kälteerzeugung durch den galvanischen Strom. Bull. de l'Acad. de St. Pét. 1838. Juin. Pogg. Ann. 44. p. 342.

Wartmann, mémoire sur la diathermansie électrique des couples métalliques. Arch. de l'élect. 1. p. 74.

Piancini, sur le froid produit par le courant électrique. Arch. de l'électr. 1. p. 579.

Poggendorff, thermoelektrischer Gegenstrom. Pogg. Ann. 58. p. 76.

VI. Pyroelektricität (Krystallelektricität).

Theophrast, de lapidibus ed. Heinsius. Lugd. Bat. 1613. p. 395.

Serapion, de simplicibus medicinis..

Curiöse Speculationes bei schlaflosen Nächten von einem Liebhaber der immer gern speculirt. Leipzig 1708.

Lemery, observations sur une pierre de l'isle de Ceylon qui attire et repousse differens corps, mais d'une manière differente. Mém. de Par. 1717. h. p. 7.

Linné, Flora Zeylonica. Holm. 1747. 8.

Wilcke, Geschichte des Turmalins. Schwed. Abh. 28. p. 95., 30. p. 1. 105.

Noya Caraffa, lettre sur la Tourmaline. Paris 1759. 4.

Wilson, experiments on the Tourmalin. Ph. Tr. 51. p. 308. 1759.

Wilson, observations upon some gems similar to the tourmalin in regard to electric experiments. Ph. Tr. 1762. p. 443.

Torbern Bergmann, Anmärkning om Islands Krystalls electricitet. Vetensk. Acad. Handl. 1762. p. 62.

Canton, remarks on Mr. Delavals electrical experiments. Ph. Tr. 52. p. 443.

Aepinus, descriptio novi phaenomeni electrici detecti in Chrysolyto sive Smaragdo Brasiliensi. Nov. Com. Acad. Petersb. 12. p. 351.

Aepinus, receuil de différens mémoires sur la Tourmaline. Petr. 1762. 8.

Torbern Bergmann, Commentarius de indole electrica turmalini. Ph. Tr. 1766. p. 236.

Aepinus, mémoire concernant quelques nouvelles expériences électriques remarquables. Mém. de Berl. 1756. p. 105.

Schulz, über die Elektricität verschiedener Schörle in Mayers Samml. phys. Aufs. der Ges. böhm. Naturf. 1. p. 261.

Hauy, mémoire sur les propriétés électriques de plusieurs minéraux. Mém. de Par. 1785. p. 206.

Hauy, observations sur la structure des crystaux appelés zeolithes et sur les propriétés électriques de quelques uns Mém. de l'Instit. 4. T. 1. p. 49.

Hauy, traité des caractères physiques des pierres précieuses. Paris 1817. p. 146.

Hauy, traité de mineralogie. Paris 1822. I. p. 206.

Becquerel, sur les propriétés électriques de la tourmaline. Ann. de Ch. et de Ph. 37. p. 1.

Becquerel, des effets de la chaleur dans les corps mauvais conducteurs de l'électricité et dans le tourmaline. Ann. de Ch. et de Ph. 37. p. 355.

Brewster, Beobachtungen über die in den Mineralien durch Wärme erregte Elektricität. Pogg. Ann. 2. p. 297. Edinb. Journ. of Sc. 2. p. 208.

Forbes, an account of some experiments on the electricity of turmalin and other minerals when exposed to heat. Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh 13. p. 27. Lond. and Ed. Ph. Mag. 5. p. 133.

Erman, Beiträge zur Monographie des Marekanit, Turmalin und brasilianischen Topas in Bezug auf Elektricität. Abh. d. Berl. Acad. 1829. p. 41.

Köhler, Krystallform des Turmalins, Zinksilicats und Boracits in Bezug auf ihre Pyroelektricität. Pogg. Ann. 17. p. 146.

G. Rose, über den Zusammenhang zwischen der Form und der elektrischen Polarität der Krystalle. Abh. d. Berl. Acad. 1836. p. 215.

Hankel, de thermoelectricitate crystallorum. Hal. 1839. Pogg. Ann. 49. p. 493., 50. p. 237. 471. 605.

Hankel, Nachtrag zur Thermoelektricität des Topases. Pogg. Ann. 56, p. 37.

P. Riess und G. Rose, über die Pyroelektricität der Mineralien. Pogg. Ann. 59. 553.

VII. Reibungselektricität.

Geschichte der Elektricität überhaupt.

Falconer, observations on the knowledge of the ancients respecting electricity. Mem. of the Soc. of Manch. 3. p. 278

Ostertag, kleine Schriften.

Gralath, Geschichte der Elektricität und elektrische Bibliothek. Versuche und Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 1747. B. 1—3.

Historie générale et particulière de l'électricité. Paris 1752.

Dalibard, histoire abregée de l'électricité. 2 vol. 12. Paris 1766.

Krünitz, Verzeichniss der vornehmsten Schriften von der Elektricität und den elektrischen Kuren. Leipzig. 8. 1769.

Pristley, the history and present state of electricity with original experiments. Lond. 1764. 4.

Pristley, Additions to the history and present state of electricity. 1770.

Pristley, Geschichte und gegenwärtiger Zustand der Elektricität, nebst eigenthümlichen Versuchen übers. von Krünitz. Berlin 1772. 4. 517 S.

Bohnenberger, erläuternde und berichtigende Anmerkungen zu Pristleys Geschichte der Elektricität. Beiträge zur theoretischen und praktischen Electricitätslehre. St. 2. 3. Stuttg. 1793. 94.

Sigaud de la Fond, précis historique et expérimental des phénomènes électriques. Paris 1781. 8.

Kühn, Geschichte der medicinischen und physikalischen Elektricität und der neuesten Versuche in dieser nützlichen Wissenschaft. Leipz. 1783. 85. 2 Th. 8.

Kühn, die neuesten Entdeckungen in der physikalischen und medicinischen Elektricität, als eine Fortsetzung der Geschichte Leipzig 1796. 97. 2 Th.

Byewater, essay on the history, practice and theory of electricity. London 1810.

Brewster, Electricity. Artikel der Edinburger Encyclopaedie. 4. History p. 411—429,

Lunn, Electricity. Artikel der Encyclopaedia Metropolitana. 4. historical sketch of the origin and progress of electricity. p. 41—55.

de la Rive, esquisse historique des principales découvertes faites dans l'électricité depuis quelques années. Genève 1833. 8. 239 S.

Becquerel, Précis historique sur l'électricité et le magnetisme. Traité de l'électr. I. p. 1—407.

de la Rive, coup d'oeil sur l'état actuel de nos connaissances en électricité. Arch. de l'électr. 1. p. 1.

Wartmann, des travaux et des opinions des Allemands sur la pile voltaique. ib. I. p. 31.

Zeitschriften.

Sturgeon, the Annals of Electricity, Magnetism et Chemistry and Guardian of Experimental Science. Lond. seit Oktober 1836. 10 vol. 8.

de la Rive, archives de l'électricité supplément à la bibliotheque universelle de Genève. Genève seit 1841. 3 vol. 8.

The Transactions and Procedings of the London Electrical Society. 1 vol. 4. 1837—1840.

Proceedings of the London Electrical Society. 8.

Hand- und Lehrbücher.

Stargeon, lectures on electricity. London 1842. 8.

Cavallo, a complete treatise on electricity in theory and practice. London 1778. 8.

Cavallo, vollständige Abhandlung der theoretischen und praktischen Lehre von der Elektricität, nebst eignen Versuchen. üb. Leipzig 1797. 2 vol. 8.

Cuthberson, Eigenschappen van de electricität. Amsterdam 1782. 8. 2 vol.

Cuthbersons, Abhandlung von der Elektricität nebst einer genauen Beschreibung der dahingehörigen Werkzeuge und Ursachen, a. d. Hollän. Leipz. 1786—1796. 3 St. 8.

Morgans, lectures on electricity. 2 vol. 12. London.

Ferguson, an introduction to electricity. London 1770. 8.

Lovett, electrical philosopher. 1777. 8.

Wilson, short view of electricity. London 1780. 4.

Peart, on electricity and mangnetism. Gainsborough 1791.

Robison, Electricity. Encyclop. Brittan. Suppl.

Adams, an essay on electricity. London 1784. 8.

Adams, Versuch über die Elektricität worin Theorie und Ausübung dieser Wissenschaft durch eine Menge methodisch geordneter Experimente erläutert wird nebst einem Versuch über den Magnet., a. d. Engl. Leipz. 1785. 8.

Brewster, Electricity. 4. 139 S. Encyclop. Edinb.

Lunn, Electricity. 4. 129 S. Encycl. Metrop. 1830.

Carpue, introduction to electricity and galvanism.

Singer, Elements of electricity and electrochemistry. Lond. 1814.

Singer, Elemente der Elektricität und Elektrochemie a. d. E. mit Anmerkungen welche die neuesten elektrischen Entdeckungen enthalten, üb. von Müller. Breslau 1819. 8. 502 S.

Murphy, elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular action. 1833. 8.

Roget, Galvanism. Art. d. Library for the diff of usef. Knowl.

Hauy, exposition raisonné de la théorie de l'électricité et du magnetisme d'après les principes de Mr. Aepinus. Par. 1787. 8.

Hauy, Darstellung der Theorie der Elektricität und des Magnetismus, üb. von Murhard. Altenburg 1801. 8.

Lacepède, essai sur l'électricité naturelle et artificielle. Paris 1781. 2 vol. 8.

Deluc, traité élémentaire sur le fluide electro-galvanique. Mil. 1804. 8.

Biot, traité de physique expérimentale et mathématique. Tom. II. p. 209—549. Paris 1816.

Becquerel, traité expérimental de l'électricité et du magnetisme et de leur rapport avec les phénomènes naturels. Paris sect. 1834. 7 vol. 8.

Nobili, nuovi trattati sopra il calorico, l'elettricita e il magnetismo. Modena 1838. 8. und Memorie edite et inedite.

Saxtorph, Darstellung der gesammten Elektricitätslehre. 2 vol. Copenhagen 1803.

Faulwetter, kurze Grundsätze der Elektricitätslehre. 1793. 5 Th. 8.

Donndorff, die Lehre von der Elektricität theoretisch und praktisch auseinandergesetzt. Erfurt 1784. 2 vol. 8.

Langenbucher, praktische Elektricitätslehre. Augsburg 1788.

Gälle, Beiträge zur Erweiterung und Vervollkommnung der Elektricitätslehre. Salzburg 1816. 2 vol. 8.

Röslin, kritische Prüfung und Berichtigung der bisherigen Elektricitätslehre. Ulm 1823. 8.

Sammlung elektriseher Spielwerke für junge Elektriker. Nürnb. 1804. 9. Aufl. 8.

Leschan, Grundzüge der reinen Elektricitätslehre. 1826.

Fechner, Lehrbuch des Galvanismus und der Elektrochemie. Leipz. 1829. 8. 564 S.

Aeltere Hand- und Lehrbücher.

Boulanger, traité de la cause et des phénomènes de l'électricité. 1751. 8.

Wilson, a tratise on electricity. Lond. 1752. 2 éd.

Mauduyt, mémoire sur les différentes manières d'administrer l'électricité et observations sur les effets qu'elles ont produits. Paris 1754.

Jallabert, expériences sur l'électricité avec quelques conjectures sur la cause de ses effets. Gen. 1748. 8. 304 S. 2. ed. Par. 1749. üb. 1750. Basel.

Wesenberg, Gedanken von der Elektricität. 1745.

Martin, an essay on the electricity, or an examen of her nature, her cause and her properties. London 1747.

Wagner, Erforschung der Ursachen der elektrischen Wirkungen. Liegnitz 1714. 8.

Morin, nouvelle dissertation sur l'électricité des corps. Chartres 1748.

Veratti, sur l'électricité. 12. Montpel. 1750.

Bina, electricorum effectuum explicatio, quam ex principiis Newtonianis deduxit, novisque experimentis exornavit. Palaei 1751. 4.

Klingenstierna, Tal om the nyaste rön vid electricitaten. Stockh. 1751.

Hoadly and Wilson. observations on a series of electrical experiments. 1759. 4. 2 ed. 2 vol. üb. Leipz. 1763. 8.

Watkins, a particular account on the experiments published to this time on the electricity. London. 8.

Egelin, de electricitate. 4. 1759.

Wesley, electricity made plain. London 1760. 12.

Becquet, on electricity. 8.

Berdoe, on the electric fluid. 8.

Socin, Anfangsgründe der Elektricität. Han. 1778. 8

Besondre Werke.

Hawksbee, physico-mechanical experiments on various subjects, containing an account of several surprizing phenomena, touching light and electricity. London 1709. 4.

Desaguliers, on electricity. London 1742. Course of experim. phil. v. II.

Winkler, Gedanken von den Eigenschaften, Wirkungen und Ursachen der Elektricität. Leipzig 1744. 8.

Winkler, die Eigenschaften der elektrischen Materie und des elektrischen Feuers. Leipzig 1746. 8.

Bose, recherches sur la cause et la veritable théorie de l'électricité. Berl. 1745. 4.

Gordon, phaenomena electricitatis exposita. Erf. 1744. 8. 88 S.

Bose, Commentarii V. de electricitate.

Waitz, Abhandlung von der Elektricität und deren Ursachen. Berl. 1745. 4. 237 S.

Unger, Abhandlung von der Natur der Elektricität. 1745. 4.

Favre, congetture fisiche intorno alle cagioni de fenomeni osservati nella machina elettrica. 1747. 4.

Rieger, observaciones physicas sobre la fuerza electrica. Madrid 1758.

Beccaria, elettricismo artificiale e naturale. Turin. 439 S. 4.

Beccaria, experimenta atque observationes, quibus electricitas vindex late constituitur atque explicatur. Turin. 4. 66 S.

Barletti, nuove sperienze elettriche secundo la theoria del Sign. Franklin e le produzione del Pad. Beccaria 1757. 8.

Nollet, lettres sur l'électricité dans lesquelles on examine les découvertes qui ont été faites sur cette matière depuis l'année

1752 et les consequences que l'on ex peut tirer. Paris 1760. 3 vol. 8. Recherches sur électricité. 1 vol. 12. 1749. 444 S.

Oeuvres de Franklin, traduites de l'Anglois sur la 4. éd. par Dubourg avec des additions nouvelles. Par. 1773. 4. 2 vol.

Saussure, de electricitate. Genf 1766.

Lullin, de electricitate. Genf 1766.

Lord Mahon, principles of electricity containing divers new theorems and experiments together with an analysis of the superior advantage of high and pointed conductors. London 1779. 4.

Mahon, principes d'électricité. Londres 1780. 8. 250 S.

Herbert, theoria phaenomenorum electricorum. Vienne 1778.

Lyon, on the errors of the present theories of electricity. Lond. 1780. 4.

de Tressan, essai sur l'électricité considerée comme agent universel. 1786. 2 vol. 8.

Milner, experiments and observations on electricity.

Bennet, new experiments. Derby 1789.

Theoretische Vorstellungen von dem Wesen der Elektricität.

Werenberg, Gedanken von der Elektricität. 1745.

Kratzenstein, theoria electricitatis more geometrico explicata. 4.

Euler, disquisitio de causa physica electricitatis. Petersb. 1756. 4.

J. Euler, recherches sur la cause physique de l'électricité. Mém. de Berl. 1757. p. 125.

Beccaria, del elettricismo artificiale. 1753. 4.

Deluc, nouvelles idées sur la météorologie. 2 Th. London 1786. üb. Berl. 1787. I. p. 186.

Lampadius, Versuche und Beobachtungen über die Elektricität und Wärme der Atmosphaere. 1793. 8.

Voigt, Versuch einer neuen Theorie des Feuers. Jena 1793. 8.

Schrader, Versuch einer neuen Theorie der Elektricität. Altona 1796.

Gren, Grundriss der Naturlehre. Halle 1797. 8. §. 1408.

Heidmann, vollständige auf Versuche und Vernunftschlüsse gegründete Theorie der Elektricität. Wien 1799. 2 vol. 8.

Ritter, das elektrische System der Körper. Leipz. 1805. 8.

Winterl, Darstellung der vier Bestandtheile der anorganischen Natur. Jena 1804. 8.

Winterl, Kritik der Hypothese, welche das gegenwärtige Zeitalter der Naturwissenschaft zum Grunde legt. 1 Th. Elektricitätklehre. Gehlen Journ. d. Ph. n. Chem. 6. p. 1. 201.

Oersted, Ansicht der chemischen Naturgesetze. Berlin 1802.

Pohl, der Process der galvanischen Kette. Berlin 1829. 8.

Parrot, Grundriss der theoretischen Physik II. c. 3.

Ruhland, System der allgemeinen Chemie. Berl. u. Stettin 1828.

Berzelius, Abhandling om Galvanismen. Stockholm 1804. 8.

Wollaston, experiments on the chemical production and agency of electricity. Ph. Tr. 1801. p. 427.

Becquerel, considerations générales sur les changements, qui s'opèrent dans l'état électrique des corps par l'action de la chaleur, du contact du frottement et de diverses actions chimiques. Ann. de Ch. et de Ph. 46. p. 265. 337., 47. p. 113., 49. p. 131.

Theorien.

du Fay, de l'attraction et repulsion des corps électriques. Mém. de Paris 1733. p. 457. (2 Elektricitäten.)

Nollet, essai sur l'électricité des corps. Haag 1747. 8. 183 S.

Symmer, new experiments and observations concerning electricity. Ph. Tr. 1759. p. 340—389. (Symmersche Theorie.)

Franklin, new experiments and observations in electricity. Lond. 1751. 4. (Franklinsche Theorie.)

Franklin, Briefe über die Elektricität mit Anmerkungen von Wilcke. Leipzig 1758. 8.

Bigeon, note sur la théorie de l'électricité. Ann. de Ch. et de Ph. 33. p. 151. Pogg. Ann. 13. p. 614.

Wilcke, dissertatio physica de electricitatibus contrariis. Rostock 1757. 4. (Vertheilung.)

Aepinus, tentamen theoriae electricitatis et magnetismi. Petersb. 1759. 4. 390 S. (erste mathematische Theorie.)

Robison, Mechanical Philosophy. Edinb. 1816.

Hauy, exposition raisonnée de la théorie de l'électricité d'après les principes de Mr. Aepinus. Paris 1787. 8. üb. v. Murhard.

Cavendish, an attempt to explain some of the principal phenomena of electricity by means of an elastic fluid. Ph. Tr. 1771. p. 584.

Coulomb, sur l'électricité et le magnetisme. Mém. de Par. 1789. p. 455.

Coulomb, über die Elektricität. Auszug verschied. Abh. Gren neues Journ. d. Ph. 3. p. 50.

Avogrado, considérations sur l'état dans lequel se trouve une couche d'un conducteur de l'électricité, lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces donées d'électricité de differente nature. Delam. Journ. de Ph. 63. p. 450. Gehlen Journ. d. Ph. u. Chem. 6. p. 53.

Prechtl, einige Bemerkungen zu Avogrados Abhandlung über die Natur des elektrischen Ladungszustandes. Gehlen Journ. d. Ph. u. Ch. 6. p. 84.

Faraday, Experimental Researches in Electricity. London 1839. 8. 574 S. (enthält Series I—XIV aus den Phil. Tr. nämlich:

I.	1832.	p. 125.	Induction. Pogg. Ann. 25. p. 92.
II.	—	p. 163.	Induction. P. A. 25. p. 142.
III.	1833.	p. 23.	Identität der El. verschiedener Quellen. P. A. 29. p. 274. 365.
IV.	—	p. 507.	Leitung durch Schmelzen. P. A. 31. p. 225.
V.	—	p. 675.	Chemische Zersetzung. P. A. 32. p. 501.
VI.	1834.	p. 55.	Gasverbindende Wirkung des Platin. P. A. 33. p. 149.
VII.	—	p. 77.	Elektrolytisches Gesetz. P. A. 33. p. 301. 433. 481.
VIII.	—	p. 425.	Galvanische Apparate. P. A. 35. p. 1. 222.
IX.	1835.	p. 39.	Gegenstrom. P. A. 35. p. 413.
X.	—	p. 263.	Verbesserte Voltasche Säule. P. A. 36. p. 505.
XI.	1838.	p. 79.	Vertheilung. P. A. 46. p. 1. 537.
XII.	—	p. 83.	Entladung. P. A. 47. p. 33. 271. 529.
XIII.	—	p. 125.	Dunkle Entladung, El. im Vacuum. P. A. 48. p. 269. 424. 513.
XIV.	—	p. 265.	Elektrische Kräfte überhaupt. P. A. Erg. p. 249.
XV.	1839.	p. 1.	Gymnotus. P. A. Erg. p. 385.

XVI. XVII. 1840. p. 61—127. Theorie des Galvanismus. P. A. 52. p. 149. 547., 53. p. 316. 479. 548.
XVIII. 1843. p. 1. Elektricität durch Verdampfung.

Vertheilung auf der Oberfläche.

Achard, expériences qui prouvent que des corps de même nature mais de différents volumes et de differentes masses se chargent de la matière électrique en raison de leur surface sans que la masse y ait la moindre influence. Mém. de Berl. 1780. p. 47.

Coulomb, le fluide électrique ne se repand dans aucnn corps par une affinité chimique. Mém. de Paris 1786. p. 67.

Coulomb, de la quantité d'électricité qu'un corps isolé perd dans un temps donné par le contact de l'air plus ou moins humide, Mém. de Par. 1785. p. 612.

Coulomb, sur la manière dont le fluide électrique se partage entre deux corps conducteurs mis en contact. Mém. de Par. 1787. p. 421.

Poisson, sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mém. de l'Inst. 12. 1811. p. 1—92. 163. 274.

Poisson, sur la distribution de l'électricité dans une sphère creuse électrisée par influence. bull. univ. 2. p. 146.

Vernier, de la distribution de l'électricité dans le cas de trois sphères en contact, dont les deux extrèmes sont égales et les centres sur une même ligne. Paris 1824. 4.

Green, an essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingh. 1828. 4.

Anziehung und Abstossung.

Coulomb, construction et usage de la balance électrique. Détermination de la loi, suivant laquelle les corps chargés d'électricité contraire se repoussent mutuellement. Mém. de Par. 1785. p. 569.

Coulomb, détermination des lois, suivant lesquelles le fluide magnétique ainsi que le fluide électrique agissent par attraction et repulsion. Mém. de Par. 1785. p. 587.

Simon, über die Gesetze, welche dem elektrischen Abstossen zum Grunde liegen. Gilb. Ann. 28. p. 277.

Kaemtz, dissertatio de legibus repulsionum electricarum mathematicis. Halae 1823. 4.

Ermerius, de lege repulsionis electricae. Lugd. Bat. 1827. 4.

Egen, über das Gesetz der elektrischen Abstossungskraft. Pogg. Ann. 5. p. 199.

Tobias Mayer, de vi electrica repulsiva. Nov. Comm. Soc. Gott. vol. V.

Yelin, Versuche und Beobachtungen zur nähern Kenntniss der Zambonischen Säule. München 1820.

Parrot, Gilb. Ann. 53. p. 346., 60. p. 28., 61. p. 274.

Brandes, Beitrag zur Beantwortung der Frage, wie die anziehende und abstossende elektrische Kraft von der Entfernung abhänge. Schweigg. Journ. 35. p. 45.

Harris, on some elementary laws of electricity. Phil. Tr. 1834.

Strehlke, Pogg. Ann. 12. p. 478. (Stellung gleich- und ungleichartig elektrischer Scheiben.)

Gebundene Elektricität (Vertheilung)

Deluc, nouvelles idées sur la météorologie. vol. 2.

Biot, Traité de physique II. p. 280.

Harris, inquiries concerning the elementary laws of electricity. Ph. Tr. 1836. p. 417., 1839. p. 215.

Ohm, über eine verkannte Eigenschaft der gebundenen Elektricität. Schweigg. Journ. 65. p. 129.

Mohr, über Vertheilung und Bindung der Elektricität in isolirten Leitern. Pogg. Ann. 36. p. 221.

Riess, Repert. d. Phys. II. p. 30.

Pfaff, über elektrische Vertheilung und die sehr merkwürdige Erscheinung einer durch Repulsivkraft frei thätigen Elektricität ohne Propagationsvermögen. Pogg. Ann. 44. p. 332.

Riess, Bemerkungen über das Propagationsvermögen der gebundenen Elektricität. Pogg. Ann. 44. p. 332.

Knochenhauer, über die Eigenschaften der gebundenen Elektricität. Pogg. Ann. 47. p. 444.

Knochenhauer, Versuche über die gebundene Elektricität. Pogg. Ann. 58. p. 211. 391.

Faraday, Experimental Researches Series 11. 13.

Hare, letter to Pr. Faraday on certain theoretical opinions. Sill. Journ. vol. 38. sec. lett. 1841. 1. Jan.

Faraday, answer. Lond. and Ed. Ph. Mag. 17. p. 56.

Faraday, ou static electrical iuductive action. Lond. and Ed. Ph. Mag. 22. p. 200. Pogg. Ann. 58. p. 603.

Harris, on the specific inductive capacities of certain electrical substances. Ph. Tr. 1842. p. 165.

Isolation und Leitung.

Gray, experiments in electricity. Ph. Tr. vol. 31. p. 104., 37. p. 18. 227. 285. 397., 39. p. 16. 166. 220. 400. (Entdeckung des Unterschiedes zwischen Leiter und Nichtleiter).

du Fay, mémoires sur l'électricité. Mém. de Paris 1733. p. 23. 73. 233. 457., 1734. p. 341. 503., 1737. p. 86. 307.

Canton, some new electrical experiments. Ph. Tr. 1754. p. 780. (Isolation der Luft.)

Beccaria, lettere del elettricismo. p. 87.

Beccaria, elettricismo artificiale e naturale (Wasser schlechter Leiter.)

Lullin, dissertatio physica de electricitate. Genf 1766. 8. (Isolation des Oeles.)

Henley, account of some new experiments in electricity. Ph. Tr. 1774. p. 389. (Dampf ein Leiter.)

Waitz, Abhandlung von der Elektricität und deren Ursachen. p. 51. §. 201. (die Flamme ein Leiter.)

du Tour, mémoire sur la manière dont la flamme agit sur les corps électriques. Mém. prés 1755. 2. p. 146.

Watson, experiments to illustrate the nature and properties of Electricity. Ph. Tr. 44. p. 41.

Pouillet, mémoire sur l'électricité des fluides élastiques et sur une des causes de l'électricité de l'atmosphère. Ann. de Ch. et de Ph. 35. p. 401.

Schafhäutl, on steam as considered as a conductor. Lond. and Ed. Ph. Mag. 18. p. 14. (uncondensirter Wasserdampf ein Isolator.)

Pristley, Experimente über die leitende Kraft verschiedener Substanzen. Geschichte der El. p. 398—409.

Pristley, experiments and observations on charcoal. Ph. Tr. 1770. p. 211.

Guyton, Scheerer Journ. d. Chem. 1. p. 297. (Diamant ein Isolator.)

Delaval, several electrical experiments. Ph. Tr. 1759. p. 83., 1761. p. 353. (Einfluss der Temperatur.)

Canton, remarks on Mr. Delaval's electrical experiments. Ph. Tr. 1762. p. 457. und 48. p. 350. 780.

Ammersin, de electricitate lignorum. Luzern 1754. (Isolation d. Holzes.)

Achard, sur l'analogie qui se trouve entre la propriété des corps de conduire le fluide électrique et de recevoir la chaleur. Mém. de Berl. 1779. p. 27.

Achard, Rozier Journ. 8. p. 364. (Eis als Cylinder einer Elektrisirmaschine.)

Morgan, electrical experiments made in order to ascertain the non conductiug power of a perfect vacuum. Ph. Tr. 1785. p. 272.

Cavallo, Reihe der Körper als Leiter., vollständige Abhandlung der Lehre v. d. Elect. 1. p. 22.

Singers, Reihe, Elemente der Elektricitätslehre. p. 24.

Henrici u. Hausmann, Versuche über das elektrische Leitungsvermögen der Mineralkörper, mitgetheilt in der 9. Versamml. d. Gött. bergmänn. Vereins.

Fechner, Biot Lehrbuch der Experimentalphysik II. p. 274. (ausführliche Literatur.) (siehe auch oben p. 198.)

Geschwindigkeit der Elektricität in Leitern.

Watson, an account of the experiments made by some gentlemen of the Roy. Soc. in order to measure the absolute celerity of electricity. Ph. Tr. 1748. p. 491.

Wheatstone, an account of some experiments to measure the celerity of electricity and the duration of electric light. Ph. Tr. 1834. p 583. Pgg. Ann. 34. p. 464.

Ettrick, on the two electricities and Pr. Wheatstones determination of the celerity of electric light. Stnrg. Ann. 2. p. 39.

Mechanische Veränderung der Körper bei dem Durchgang der Elektricität.

Nairne, the effect of electricity in shortening wires. Ph. Tr. 1780. p. 334.

Becquerel 2, Wirkung elektrischer Entladung auf Dräthe von sehr geringem Durchmesser. Pogg. Ann. 48. p. 546. bibl. univ. n. s. 20. p. 344.

Henry, Trans. of the Americ. Ph. Soc. vol. 6. Pogg. Ann. Erg. p. 310. (Umbiegen der Enden der Stücke eines unterbrochenen Leiters.)

Fusinieri, mémoire sur le transport de substances ponderables par la foudre. bibl. univ. 48. p. 371., 49. p. 1.

Lullin, dissertatio physica de electricitate. p. 24. (Durchbohren einer Charte.)

Tremery, examen des phénomènes électriques qui ne paraissent pas s'accorder avec la théorie des deux fluides. Soc. Philom. An. 10. p. 114. Gilb. Ann. 23. p. 426., 32. p. 312.

Osann, einige neue Versuche über die Natur des elektrischen Funkens. Pogg. Ann. 55. p. 121.

Seitenentladung und Rückschlag.

Pristley, experiments on the lateral force of electrical explosions. Ph. Tr. 59. p. 57.

Pristley, an investigation of the lateral explosion and of the electricity communicated to the electrical circuit, in a discharge. Ph. Tr. 60. p. 192.

Lord Mahon, principles of electricity.

Schmelzen der Metalle durch Entladung.

Kinnersley, in Watson observations upon the effects of lightning. Ph. Tr. 1764. p, 204.

Pristley, history of electricity. p. 294. 312. Uebers. p. 487.

Brooke, miscellaneous experiments on electricity etc. übersetzt v. Kühn. Leipzig 1790. 8.

Cuthberson, einige Schmelzungsversuche durch galvanische und gewöhnliche Elektricität. Nichols Journ. 8. p. 97. Gilb. Ann. 23. p. 263. practical electricity. p. 181—197.

Singer, Elements of electricity. I ch. 3. Uebersetz. p. 121.

van Marum, première continuation des expériences faites par les moyens de la Machine Teylerienne. p. 182.

Kienmeyer, Rozier Journ. d. Ph. 33. p. 101.

Erwärmung der Metalle.

Kinnersley. Phil. Trans. 54. p. 208.

Harris, on the relative powers of various metallic substances as conductors of electricity. Ph. Tr. 1827. p. 18.

Riess, über einige Wirkungen der Reibungselektricität im Verhältniss zu ihrer Anhäufung. Pogg. Ann. 40. p. 321.

Riess, über die Erwärmung im Schliessungsbogen der elektrischen Batterie. ib. 43. p. 47.

Riess, über die elektrische Verzögerungskraft und das elektrische Erwärmungsvermögen der Metalle. ib. 45. p. 1.

Elektrische Figuren.

Lichtenberg, de nova methodo naturam ac motum fluidi electrici investigandi. Nov. Com. Soc. Gött. 1777 t. 8.

Deluc, idées sur la météorologie 1. p. 390.

Paetz van Troostwyck und Krayenhoff, verhandeling over zeekere onderscheidene Figuren, welken dor de beede Sorten van Electricität vorden voordgebracht, üb. Leipz. Saml. z. Phys. 4. p. 357. 1790.

Schneider, de figuris electricis. Bonn 1840. 4.

Karsten, imponderabilium praesertim electricitatis theoria dynamica cum appendice de imaginibus, quae luce, calore, electricitate procreantur. Berol. 1843. 4. 47 S.

Lars Ekmark, neuer Beweis für die Theorie zweier elektrischer Materien. Gilb. Ann. 23. p. 431. Vetensk. Ac. Nya Handl. 1800.

Aldini, Brugnatelli Ann. di Chim. 13. p. 137. Gilb. Ann. 4. p. 422.

v. Arnim, elektrische Versuche. Gilb. Ann. 5. p. 33.

Riess, Hauchfiguren. Repert. 6. p. 180.

Karsten, über elektrische Abbildungen. Pogg. Ann. 57. p. 492., 60. p. 1.

Elektrisches Licht.

Otto v. Guerike, experimenta nova de vacuo spatio. 1672. p. 149. (zuerst wahrgenommen.)

Wall, experiments on the luminous qualities of amber diamonds and gum-lac. Ph. Tr. 1708. p. 69.

du Fay, mémoire on l'on examine quel rapport il y a entre l'électricité et la faculté de rendre de la lumière, qui est commune a la plupart des corps électriques. Mém. de Paris 1734. p. 503.

Krünitz, von der Elektricität der Barometer. Verzeichniss p. 153. Nr. 328—364.

Trembley, on the electric nature of the barometrical light. Ph. Tr. 1746. p. 58.

Miles, On electrical fire. Ph. Tr. 44. p. 78. (Büschel.)

Pfaff, über die Entzündung des Schiesspulvers durch eine, in ihrem Durchgang durch den Erschütterungskreis gehemmte elektrische Entladung in besondrer Beziehung auf Bestimmung des elektrischen Leitungsvermögens verschiedener Flüssigkeiten. Schweigg. Journ. 48. p. 276.

Ludolff, histoire de l'Acad des scienc. de Berl. 1745. p. 11. (Zünden.)

Sturgeon, on the inflammation of gunpowder and other substances by electricity. Ann. of Ph. 1827. 1. 20.

Doppelmayer, über das elektrische Licht. 1749.

Canton, new electrical experiments. Ph. Tr. 1754. p. 780.

Funken.

Nicholson, experiments and observations on electricity. Ph. Tr. 1789. p. 265.

van Marum, Beschreibung einer sehr grossen Elektrisirmaschine. Kupfer.

Heller, über das Leitungsvermögen des Wassers und Betrachtungen über das Licht des elektrischen Funkens. Gilb. Ann. 6. p. 249.

Knoch, Bemerkungen über einige elektrische Versuche, deren Erklärung schwierig schien. Gilb. Ann. 24 p. 104. (Bläuliche Stelle in der Mitte d. Funkens.)

Saxtorph, Elektricitätslehre 1. p. 225.

Hildebrand, Versuche über die Unterschiede des Lichtes beider Elektricitäten in verdünnter Luft. Schweigg. Journ. 1. 237., 11. p. 437.

Morgan, electrical experiments made in order to ascertain the non conducting power of a perfect vacuum. Ph. Tr. 1785. p. 272.

Davy, on the electrical phenomena exhibited in vacuo. Ph. Tr. 1822. p. 64

Grotthus, Schweigg. Journ. 3. p. 142.

Meinecke, Gilb. Ann. 62. p. 87.

Fechner, vom elektrischen Licht und der Spitzenströmung. Biot Phys. Ueb. 2. p. 311.

Faraday, Experimental researches in electricity. series 12. §. 1406 bis 1561.

Frauenhofer, determination du pouvoir refringent et dispersif etc. p. 44.
Wheatstone, on the prismatic decomposition of electrical light. Lond. and Ed. Ph. Mag. 7. p. 299. Pogg. Ann. 36. p. 148.
Wheatstone, an account of some experiments to measure the velocity of electricity and the duration of electric light. Ph. Tr. 1834. p. 583.
Dove, über die Discontinuität des Blitzes. Pogg. Ann. 35. p. 379.
Dove, (Augenblickliche Entstehung des Unterbrechungsfunkens.) Pogg. Ann. 56. p. 274.
Gross, elektrische Pausen. Leipz. 1776. 8. 136 S.
Riess, über die Schlagweite der elektrischen Batterie. Pogg. Ann. 53. p. 1.
Morgan, experiments on electric light. Ph. Tr. 1785. p. 198.
Biot, Ann. de Chim. 53. p. 321. Traité de physique II. p. 459. (durch Compression erklärt.)
Pohl, der Process der galvanischen Kette. p. 320.

Elektrische Erregung.

a) Durch Reiben (elektrische Reihen).

Boulanger, traité de la cause de l'électricité. p. 74. (Verzeichniss der Körper nach der Stärke der erregten Elektricität.)
du Fay, de l'attraction et repulsion des corps électriques. Mém. de Paris 1733. p. 457.
Symmer, new experiments and observations concernig electricity. Ph. Tr. 51. p. 340.
Cigna, de novis quibusdam experimentis electricis. Misc. Tauri 2. p. 31.
Beccaria, dell'elettricismo artificiale e naturale. 1753. 4.
Bergmann, elektrische Versuche mit Seidenbande von unterschiedlicher Farbe. Schwed. Abh. 25. p. 344.
Wilcke, de electricitatibus contrariis. p. 54.
Lichtenberg, Erxleben Anfangsgründe der Naturlehre. Aufl. 6. p. 478.
Cavallo, vollständige Abhandlung von der El. 1. p. 308—315. 4. Aufl.
Ritter, das elektrische System der Körper. 3. Abschnitt. p. 112.
Saxtorph, Elektricitätslehre 1. p. 31.

Singer, Elektricitätslehre. p. 302.
Fechner, Resultate der Analysen. p. 259. (Reihe der Holzarten.)
Pereyro, de l'électricité qu'on développe en plongeant dans le mercure et en en retirant successivement differentes substances. Arch. de l'élect. 2. p. 395.

b) Durch Sieben von Pulvern.

Kortüm in Lichtenberg Magaz. 10. 2. p. 15.
v. Arnim, elektrische Versuche. Gilb. Ann. 5. p. 33.
Aldini, elektrische Versuche. Gilb. Ann. 4. 419. Brugnat. Ann. 13. p. 135—154.

c) Durch Druck.

Libes, Traité complet et élementaire de physique. 8.
Hauy, sur l'électricité de pression. Ann. de Ch. et de Ph. 5. p. 95.
Dessaignes, mémoire relatif à l'influence de la temperature, des pressions mécaniques et du principe humide sur l'intensité du pouvoir électrique et sur le changement et la nature de leur électricité. Journ. de Phys. 83. p. 194. Ann. de Ch. et de Ph. 2. p. 59.
Becquerel, sur le développement de l'électricité par la pression. ib. 22. p. 91.

d) Bei dem Verdampfen.

Lavoisior et Laplace, mémoire snr l'électricité qu'absorbent les corps qui se reduisent en vapeurs. Mém. de Paris 1781. p. 292.
Volta, del modo di render sensibilissima la piu debole elettricita sia naturale, sia artificiale. appendice. Ph. Tr. 1782. p. 274.
Saussure, voyages dans les Alpes. Ch. 28.
Volta, meteorologische Briefe. Leipzig 1793. p. 193.
Erman, über den wechselseitigen Einfluss von Elektricität und Wärmethätigkeit. Abh. d. Berl. Acad. 1814. p. 123.
Pouillet, mémoire sur l'électricité des fluides élastiques et sur une des causes de l'électricité de l'atmosphère. Ann. de Ch. et de Ph. 35. p. 401. 365.
Armstrong, on the electricity of a jet of steam issuing from a boiler. Lond. and Ed. Ph. Mag. 17. p. 370. 452., 18. p. 51.

Pattison, experiments on the electricity of high pressure steam. ib. 17. p. 376. 457.

Armstrong, on the electric phenomena attending the efflux of condensed air, and of steam generated under pressure ib. 18. p. 328.

Armstrong, on the cause of the electricity of effluent steam. ib. 20. p. 5., 22. p. 1., 23. p. 194. Pogg. Ann. 60. p. 348. 352.

Schafhäutl, remarks on the electricity of steam. ib. 17. p. 449.

Schafhäutl, on steam as considered as a conductor of electricity. ib. 18. p. 14.

Schafhäutl, on the circumstances under which steam developes positive electricity. ib. 18. p. 95. 265.

Williams, on the electricity of steam. ib. 18. p. 93.

Faraday, Experimental researches in electricity. 15 series. Ph. Tr. 1843. Pogg. Ann. 60. p. 321.

---

van Marum et van Troostwyck, expériences sur la cause de l'électricité des substances fondues et refroidies. Journ. de Ph. 1788. p. 148.

v. Grotthuss, über die Elektricität, die sich bei verändertem Zustande des Wassers entwickelt. Gehl. Journ. d. Chem. u. Ph. 9. p. 221.

Becquerel, des courants electriques qui ont lieu dans les actions capillaires et les dissolutions. Ann. de Ch. et de Ph. 24. p. 337.

Elektrisirmaschine.

Otto v. Guerike, experimenta nova de vacuo spatio. 1672 Amst. p. 140.

Hawksbee, an experiment touching the production of light within a globe glass, whose inward surface is lined with sealing-wax, upon an attrition of its outside. Ph. Tr. 1798. p. 219.

Hausen, novi profectus in historia electricitatis 1743. 4.

Winkler, epistola, quae continet descriptionem et figuras pyrorgani sui electrici. Ph. Tr. 1747. p. 497. (Kugelmaschine.)

Watson, experiments and observations on electricity. 1745. 8. (4 Kugeln.)

Wilson, erste Cylindermaschine abgeb. in Pristley Gesch. d. El. p. 348.

Pristley, history of electricity. p. 529. (Beschreibung und Abbildung der Maschinen v. Nollet, Hawksbee, Wilson, Watson, Read, Pristley.)

Espinasse, description of an improved apparatus for performing electrical experiments. Ph. Tr. 1767. p. 186.

Nooth, on some improvements in the electrical machine. Ph. Tr. 1773. p. 335.

Nairne, electrical experiments made with a machine of his own workmanskip, a description of which is prefixed. Ph. Tr. 1774. p. 79.

Planta, 1760 erste Scheibenmaschine. Allg. deutsche Biblioth. B. 24. Anh. 4. Abth. p. 549.

Ingenhouss, Improvements in electricity. Ph. Tr. 1779. p. 661. Schriften 1. p. 169. (Scheibenmaschine.)

Bohnenberger, Beschreibung einiger Electrisirmaschinen und electrische Versuche nebst 6 Fortsetzungen. Stuttgard 1783 bis 1791.

Schmidt, Beschreibung einer Electrisirmaschine und deren Gebrauch. Berlin 1778. 4. 56 S.

Langenbucher, Beschreibung einer verbesserten Electrisirmaschine. Anspach 1780. 8.

Hoffmann, praktische und gründliche Anleitung auf eine leichte und wohlfeile Art gute Electrisirmaschinen zu bauen. Leipzig 1795. 8.

Nicholson, experiments and observations on electricity. Ph. Tr. 1789. p. 265.

Pearson, experiments and observations made with the view to ascertain the nature of the gas produced by passing electric discharges through water Nichols. Journ. 1. pag. 241. 299. 349.

Cuthberson, Beschreibung einer Elektrisirmaschine und einiger damit von Deimann und Trostwyk angestellter Versuche. Leipzig 1790. (Scheibenmaschine mit zwei isolirenden Ständern.)

van Marum, description d'une très grande machine électrique

placée dans le musée de Teyler a Haarlem et des expériences faites par le moyen de cette machine. Continuation 1. 2. 1795.

van Marum, Beschreibung einer sehr grossen Electrisirmaschine und der damit angestellten Versuche. Leipzig 1786. 8.

Musnier, Mém. de Paris 1772. p. 502. in Bertholon de l'électricité du corps humain 2 p. 110. (4 isolirte Küssen.)

St. Julien, Rozier Observations sur la physique 1788. v. 33. p. 367. (3 Scheiben).

Wolff, über Elektricität und Verbesserung der Electrisirmaschinen vorzüglich an ihren Reibern. Gilb. Ann. 12. p. 597.

Nicholson, Vergleichung der Cylindermaschinen und der Scheibenmaschinen in ihrer Wirkung. Gilb. Ann. 23. p. 298. a. Nichels, Jonrn. 1. p. 83.

Cuthberson u. Singer, Vergleichende Versuche über die elektrische Kraft der Cylindermaschinen und der Scheibenmaschinen. Gilb. Ann. 39. p. 245.

Boht, Maschine, beschrieben von Pfaff, neuer Gehler. E. p. 443.

Wolfram, Beschreibung einer neuen Elektrisirmaschine. Gilb. Ann. 74. p. 53. (Glockenmaschine.)

Hare, description of an electrical machine so constructed as to be above the operator. Sturg. Ann. 1. p. 487.

Pfister, eine besonders wirksame Elektrisirmaschine nebst einigen damit angestellten Versuchen. Baumg. Journ. 3. p. 439.

Elektrisirmaschinen aus andern Substanzen.

Volta, de corporibus eteroelectricis quae fiunt idioelectrica experimenta atque observationes. 1771. (Pappe.)

Ingenhouss, vermischte Schriften. 1784. 1. p. 18. (Pappe zwischen Hasenbälgen.)

van Marum, Abhandlung über das Elektrisiren. 1777. 8. (Gummilakscheibe in Quecksilber laufend.)

Pickel, experimenta physico-medica de electricitate. Würzb. 1778. 8. (Holzscheibe.)

Lichtenberg, Goth. Mag. 1. 1. 83. 1781. (Trommel v. wollnen Zeuge.)

Walckier, Mém. de Paris 1784. Gilb. Ann. 23. pag. 309. (aus gefirnister Seide.)

Rouland, description des machines électriques à taffetas. Amst. 1785. 8.

Kleine Maschinen.

Ingenhouss, Vermischte Schriften. 1784. 1. p. 145. (Seidenband zwischen Hasenfellen.)

Page, Sillim. Amer. Journ. 26. p. 110. (gläserne Spritze.)

Reibzeug und Amalgam.

van Marum, descriptions des frottoirs électriques. 4. Haarl. 1789. Rozier Journ. 34. p. 274.

Woulf, experiments to show the nature of aurum nativum. Ph. Tr. 1771. p. 114.

Higgins, on the use of an amalgam of zinc for the purpose of electrical excitation. Ph. Tr. 1778. p. 861.

Kienmayer, über eine neue Bereitungsart des elektrischen Amalgams und die Wirkungen desselben. Goth. Magaz. 6. p. 104.

Singer, Elemente der Electricität. p. 33.

Oertling's Reibzeug. Repertorium 1. p. 92.

Hare, Sillim. Amer. Journ. 24. p. 256.

Johnson, ib. 25. p. 68.

Conductor.

Bose, de electricitate commentarius II. 1743. Wittenb. 4. (fügt den Conductor dem geriebenen Körper hinzu.)

Leroy, mémorie sur une machine à électriser d'une expèce nouvelle. Mém. de Paris 1772. (positiver und negativer Conductor.)

Sulla, capacita dei conduttori elettrici. 4.

Wilson, an account of experiments made at the Pantheon on the nature and use of conductors. London 1778. 4.

Henley, the description and use of a new prime conductor. Ph. Tr. 1774. p. 389.

Volta, dei conduttori elettrici. Opusc. scelt. di Milano vol. 1.

Volta, über die Capacität elektrischer Leiter. Voltas Schriften über v. Nasse. Halle 1803.

Cavendish, on pointed conductors. Ph. Tr. 1773. p. 66.

Flasche uud Batterie.

Titius, de electrici experimenti Lugdunensis inventore primo. Witt. 1771. 4.

Krüger, Geschichte der Erde. Halle 1746. 8. p. 177. (Bekanntmachung der von v. Kleist gemachten Entdeckung.)

Gralath, Geschichte der Elektricität. 2. Absch. p. 407. Abh. der nat. Ges. in Danzig I. 1747.

Muschenbroek, lettre à Mr. Réaumur. Mém. de Par. 1746. p. 2.

Winkler, die Stärke der elektrischen Kraft des Wassers in gläsernen Gefässen, welche durch den Muschenbrökschen Versuch bekannt geworden. Leipzig 1746. 8. 164 S.

Watson, further experiments and observations tending to illustrate the nature and properties of electricity. Ph. Tr. 44. p. 41. 704.

Strömer. Untersuchung von der Elektricität. Sch. Abh. 1746. p. 154.

Franklin, Briefe von der Elektricität, üb. v. Wilcke. Leipz. 1758.

Beccaria, new experiments in electricity. Ph. Tr. 1767. p. 297.

Wilson, new experiments upon the Leyden phial respecting the termination of conductors. Ph. Tr. 1778. p. 999.

Wilcke, elektrische Versuche und Untersuchungen wie die elektrische Ladung und Schlag durch mehr Körper als Glas und Porzellan erhalten werden können. Schwed. Abh. 1758. p. 241.

Wilcke, fernere Untersuchung von den entgegengesetzten Elektricitäten bei der Ladung und den dazu gehörenden Theilen. ib. 1762. g. 213. 253.

Brooke, vermischte Erfahrungen über die Elektricität. üb. von Kühn. Leipzig 1790. 8.

Wilkinson, on the Leyden phial. London 1798. 8.

Barletti, della supposta eguaglianza di contraria elettrica nelle due opposte facce del vetro o di uno strato resistente per ispigiare la scarica o scossa della boccia di Leyden. Mem. dell. Soc. Ital. 4. p. 304.

Barletti, della lege d'immutabile capacita e necessaria contrarieta di eccesso e difetto di elettricita negli opposti lati del vetro e di altro strato resistente supposta da Franklin per la spiegazione della scarica elettrica nella boccia Leidense ib. 7. p. 444.

Henley, account of some new experiments in electricity. Ph. Tr. 1774. p. 389.

Cavendish, some attempts to imitate the effects of the torpedo

by electricity. Ph. Tr. 1776. p. 196. (Einfluss der Dicke des Glases.)

Gray, observations on the manner in which glass is charged with the electric fluid and discharged. Ph. Tr. 1788. p. 121.

Nicholson, experiments and observations on electricity. Ph. Tr. 1789. p. 183. Gilb. Ann. 23. p. 273. (Glimmerbatterie.)

von Marum, Beschreibung einer grossen elektrischen Batterie von 550 Quadratfuss Belegung und einiger damit angestellten Versuche. Gilb. Ann. 1. p. 68. 275.

Sturgeon, Ann. of El. 2. p. 86. (Mittel gegen Zerspringen der Flaschen.)

Bohnenberger, Beschreibung einer Elektrisirmaschine. 1784. p. 44. (Glastafelbatterie.)

Dana, Schweigger Journ. 23. p. 257. (Tafelbatterie aus abwechselnden Schichten von Glas und Zinnfolie.)

Haldane, a method of measuring the force of an electrical battery during the time of its being charged. Nichols. Journ. 1. p. 156. Gilb. Ann. 3. p. 22. (äussere Belegung ladet eine Entladungsflasche.)

Cuthberson, ein neues sehr einfaches Mittel die Kraft der elektrischen Flaschen beträchtlich zu erhöhen und Methoden diese Kraft genau zu messen. Nichols. Journ. 2. p. 525. Gilb. Ann. 3. p. 1.

Bohnenberger. Gedanken über die Möglichkeit elektrische Verstärkungsflaschen weit stärker als bisher zu laden. Gren Journ. 2. p. 19.

Reade, summary view of the spontaneous electricity p. 16. (Nachweisung schwacher Rückstände durch den Condensator.)

Canton, an attempt to account for some of the phenomena of electrical experiment. Ph. Tr. 48. p. 350. 780. (Durchdringung des erwärmten Glases durch Elektricität.)

Volta, fortgesetzte Versuche über die Elektrität. Gilb. Ann. 14. p. 257. Expériences tendantes à prouver la perméabilité du verre pour le fluide électrique, et la charge de la bouteille et du carré armé par double accumulation. van Mons Journ. 1803. Janv. Gilb. Ann. 24. p. 310.

Zamboni, neuere Versuche mit elektrischen Säulen. Gilb. Ann. 51. p. 185.

Biot, Traité de physique expérimentale et mathématique. 2. p. 382.

Riess, über einige Wirkungen der Reibungselektricität im Verhältniss zu ihrer Anhäufung. Pogg. Ann. 40. p. 321.

Auslader.

de Romas, mémoire sur un moyen aisé pour élever fort haut un corps électrisable isolé. Mém. pres. de math. et ph. 2. p. 393.

Lane, description of an electrometer invented by him, with an account of some experiments made with it. Ph. Tr. 1767. p. 431.

Cuthberson, measurement by explosion. Nichols. Journ. 2. p. 215.

Henley, Cavallo. vollst. Abh. der Elekt. 4. Aufl. 1. p. 161.

Lawson, discharging elektrometer. Ph. Mag. 11. 251.

v. Hauch, Versuch eines verbesserten Auslade-Elektrometers. Gren neues Journ. 1. p. 345.

Funkenmesser.

Gross, Elektrische Pausen. Leipzig 1776. 8.

le Roy, sur la différence des distances auxquelles partent les étincelles entre deux corps métalliques des figures différentes. Mém. de Par. 1766. p. 541.

Langenbucher, Beschreibung einer Elektrisirmaschine. 1780. 8. p. 46.

Elektrophor.

Volta, lettere sul elettroforo perpetuo. Scelta di opusc. di Milano. 8. p. 127.; 9. p. 91.; 10. p. 37. Rozier Journ. de Ph. 7. p. 21.

Ingenhouss, electrical experiments to explain how far the phenomena of the electrophorus may be accounted for by Dr. Franklins theory of positive and negative electricity. Ph. Tr. 1778. p. 1027.

Wilcke, Untersuchung der bei Voltas neuem Elektrophoro perpetuo vorkommenden elektrischen Erscheinungen. Schwed. Abh. 1777. p. 54. 116. 200.

Henley, observations and experiments tending to confirm Ingen-

houss theory of the electrophorus, and to show the impermeability of glass. Ph. Tr. 1778. p. 1049.

Kraft, tentamen theoriae electrophori. Act. Acad. Petr. 1771. p. 154.

Achard, expériences sur l'électrophore avec une théorie de cet instrument. Mém. de Berl. 1776. p. 122.

Hemmer, Zergliederung des beständigen Elektricitätsträgers. Comm. Acad. Theod. Palat. 4. Phys. p. 94.

Klindworth, Goth. Mag. 1. 2. p. 35. (Beschreibung des grossen Lichtenbergischen Elektrophors.)

Obert, Goth. Mag. 5. 3. p. 96.

Mickeler, Theorie des Elektrophor. ib. 5. 3. p. 110.

Heidemann, vollständige Theorie der Elektricität. 1. p. 53.

Pickel, experimenta physico medica de electricitate et calore animali. Würzb. 1778. 8.

Gr. v. Matuschka, von dem Elektrophor. Oek. Nachr. d. Gesellsch. in Schlesien 7. p. 67.

v. Marum, Antwoord op de vraag; op te geeven den besten toestel van den electrophore, de byzondere verschynzelen van dit electrisch werktuig proefkundig te verklaaren, en aan te wiizen, welk nieuw licht hetzelve aan di leere der electricîtät toegebracht heeft. Verhand. van het Genootsch. te Rotterd. 7. p. 195.

Lichtenberg, doppelter Elektrophor. Goth. Magaz. 1. 2. p. 42.

Weber, neue Erfahrungen ideoelektrische Körper ohne einiges Reiben zu elektrisiren. Augsb. 1781. 8.

Weber, Beschreibung des Luftelektrophors. Augsb. 1779. 8.

Condensator.

Volta, on the method of rendering very sensible the weakest natural or artificial electricity. Ph. Tr. 1782. p. VII.

Cavallo, on the method of manifesting the presence and ascertaining the quality of small quantities of natural or artificial electricity. Ph. Tr. 1788. p. 1.

Cavallo, description of a new electrical instrument capable of collecting together a diffused or little condensed quantity of electricity. ib. p. 255.

Cavallo, elements of natural philosophy 3. p. 425.

Bennet, an account of a doubler of electricity, or a machine by

which the least conceivable quantity of positive or negative electricity may be continually doubled, til it becomes perceptible by common electrometer, or visible in sparks. Ph. Tr. 1787. p. 288.

Bennet, experiments and observations made with the doubler of electricity, with a view to determine its real utility in the investigation of atmospheric electricity. Ph. Tr. 1794. p. 266.

Robison, System of Mechanical. Philosophy vol. 4.

Nicholson, a description of an instrument which, by the turning of a winch, produces the two states of electricity without friction or communication with the earth. Ph. Tr. 1788. p. 403. Nichols. Journ. 2. p. 370.; 4. p. 95. Gren. Journ. d. Ph. 2. p. 61.

Bohnenberger, Beschreibung unterschiedlicher Elektricitätsverdoppeler von einer neuen Einrichtung nebst einer Anzahl von Versuchen über verschiedene Gegenstände der Elektricitätslehre. Tübingen 1798. 8. Gilb. Ann. 9. p. 158.

Read, on the electrical doubler. Nich. Journ. 2. p. 495.

Nichholson, über die Instrumente, welche bestimmt sind sehr kleine Grade von Elektricität zu verstärken und merkbar zu machen. Nich. Journ. 1 p. 395. Gilb. Ann. 9. p. 121.

Cuthberson, Beschreibung eines neuen sehr empfindlichen Condensators. Nich. Journ. 2. p. 281. Gilb. Ann. 13. p. 208.

v. Breda, Antwoord op de vraage, terwyl de condensateur door Volta onlangs uitgedagt, gelegenheid geeft, om eene zeer geringe elektrike kracht van den dampkring te outdekken. Verhand. van het Maatsch. te Haarlem 26. p. 363.

Dumotiez, Rozier Journ. de Ph. 31. p. 431.

Hachette et Desormes, sur le doubleur d'électricité. Soc. Philom. Ann. 12. p. 177.

Péclet, Annales de Ch. et de Ph. 3. sér. 2. p. 100. (Doppelcondensator wie der von Bennet.)

Elektroskope uno Elektrometer.

du Fay, mém. 3. 4. sur électricité. Mém. de Paris 1733. p. 233. 457.

Nollet, Eclaircissements sur plusieurs faits concernant l'électricité. Mém. de Par. 1747. p. 102.

Waitz, Abhandlung von der Elektricität und deren Ursachen. 1745. §. 180.

d'Arcy, mémoire sur l'électricité contenant la description d'un électromètre ou d'un instrument servant à mesurer la force électrique. Mém. de Par. 1749. p. 63.

Canton, new electrical experiments. Ph. Tr. 48. p. 350. 780.

Cavallo, new electrical experiments and observations; with an improvement of Cantons electrometer. Pr. Tr. 1777. p. 388.

Volta, meteorologische Schriften. Brief 1. (Strohhalmelectrometer.)

Volta, della maniera di far servire l'electrometro atmosferico portabile all uso di un igrometro sensibilissimo. Mem. della Soc. Ital. 5. p. 551.

Bennet, description of a new electrometer. Ph. Tr. 1787. p. 26. 32. (Goldblattelektrometer.) Gren Journ. d. Ph. 1. p. 380.

Saussure, voyages dans le Alpes II. p. 202.

Deluc, nouvelles idées sur la météorologie. p. 397. Ueb. 2. §. 394. (électromètre fondamental.)

Pristley, an account of a new electrometer, contrived by Mr.
Henley, and of several electrical experiments made by him. Ph. Tr. 1772. p. 359. (Quadrantenelectrometer.)

Langenbucher, Beschreibung einer beträchtlich verbesserten Elektrisirmaschine. 1780. p. 44.

Achard, über die Kraft der Elektricität verglichen mit der Kraft der Schwere. Beschäft. der Berlin. Ges. naturf. Freunde. 1. p. 53.

Ellicot, on weighing the strength of electrical effluvia. Ph. Tr. 1746. p. 96.

Richmann, de indice electricitatis et de ejus usu in definiendis artificialis et naturalis electricitatis phaenomenis. Nov. Com. Acad. Petrop 4. p. 301.

Lane, description of an electrometer invented by him, with an account of some experiments made by him with it. Ph. Tr. 1767. p. 451.

Vasalli, expériences électriques. Mém. de Turin 5. p. 57.

Hauy, Traité de mineralogie. I. fig.

Terry, Roz. Journ. de Ph. 24. p. 315.

Boyer Brun, ib. 28. p. 183.

Chappe, sur une manière de discerner l'électricité. ibid. 34. p. 62.

Comus, ib. 7. p. 520.

Cadet, Ann. de Chim. 37. p. 68.

Parrot, entretiens sur la physique, Dorpat 1822. V. p. 86.

Parrot, über die Sprache der Elektricitätsmesser. Gilb. Ann. 61. p. 263.

Cuthberson, on de distinction of the electricities. Phil. Mag. 19. p. 83.

Nicholson, on instruments for the distinction of electricity. Nichols. Journ. 3. p. 121.

Marechaux, ein neuer unglaublich empfindlicher Elektrometer und Versuche damit über die Elektricität der Voltaschen Säule und der Luft. Gilb. Ann. 15. p. 93. 99.; 16. p. 115.; 19. p. 476.; 20. p. 357.; 22. p. 318.; 25. p. 4. 18.; 26. p. 29. 123.

Behrens, Beschreibung eines neuen Elektrometers. Gilb. Ann. 23. p. 24. (Trockne Säule bestimmt die Bewegung des Goldblattes.)

Bohnenberger, Tübinger Blätter für Naturwissenschaft. 1. p. 380. Gilb. Ann. 51. p. 390. (Bohnenbergers Elektrometer.)

Becquerel, des actions électromotrices produites par le contact des métaux et des fluides. Ann. de Ch. et de Ph. 25. p. 405. Pogg. 2. p. 170. (das vorige mit horizontaler Säule.)

Fechner, über einen Apparat zur Anstellung der Voltaschen Grundversuche. Pogg. Ann. 41. p. 220.

Oersted, über ein neues Elektrometer. Pogg. Ann. 53. p. 612.

Dillmann, über das Oerstedsche Elektrometer. Pogg. Ann. 55. p. 300.

Brooke, account of a new electrometer. Ph. Tr. 1782. p. 384.

Coulomb, contruction et usage d'une balance électrique, fondée sur la propriété qu'ont les files de métal, d'avoir une force de reaction de torsion proportionelle à l'angle de torsion. Mém. de Par. 1785. p. 569.

Harris, inquiries concerning the elementary laws of electricity. Ph. Tr. 1836. p. 447. (bifile balance.)

(Siehe auch die Lehrbücher von Cavallo, Cuthberson, Adams.)

Elektrisches Thermometer.

Kinnersley in Franklin, Experiments and Observations 5. ed. p. 396.
Beccaria, elettricismo artificiale p. 229.
Saxtorph, Elektricitätslehre 1803. p. 417.
Harris, on the relative powers of various metallic substances as conductors of electricity. Ph. Tr. 1827. p. 18.
Riess, Notiz über das elektrische Luftthermometer. Pogg. Ann. 52. p. 315.
Poggendorff. ib. 52. p. 324.

Chemische Wirkungen.

Warltire, in Pristley experiments on air. vol. 3.
Cavendish, on the conversion of a mixture of dephlogisticated and phlogisticated air into nitrous acid, by the electric spark. Ph. Tr. 1788. p. 261. Gren. Jouru. d. Ph. 1. p. 282.
Paets van Trostwyk u. Deimann, über die Zerlegung des Wassers in brennbare und Lebensluft durch den elektrischen Funken. Roz. Observ. 34. p. 130. Gren. Journ. 2. p. 130.
Pearson, experiments and observations made with the view of ascertaining the nature of the gaz produced by passing electric dicharges through water. Ph. Tr. 1797. p. 142.
Singer, Elements of Electricity. 1. ch. 3. Ueb. p. 129.
Wollaston, experiments on the chemical production and agency of electricity. Ph. Tr. 1801. p. 417. Gilb. Ann. 11. p. 104.
Davy, on some chymical agencies of electricity. Ph. Tr. 1807. p. 1. Gilb. Ann. 28. p. 42.
Simon, über die Wirkung der verstärkten Elektricität auf verschiedene Thierarten. Gilb. Ann. 30. p. 54.
Bonijol, bibl. univ. An. 1831. p. 213.
Faraday, Experimental Researches in Electricity. Series III. §. 309. 331.
Schönbein, Beobachtungen über den bei der Elektrolysation des Wassers und dem Ausströmen der gewöhnlichen Elektricität aus Spitzen sich entwickelnden Geruch. (Ozon.) Pogg. Ann. 50. p. 616.
Schönbein, über die Natur des eigenthümlichen Geruchs, welcher

sich sowohl am positiven Pole einer Säule während der Wasserelektrolyse, wie auch beim Ausströmen der gewöhnlichen Elektricität aus Spitzen entwickelt. Denksch. d. München. Akad. III. 3. p. 589. Arch. de l'électr. 3. p. 295.

de la Rive, observations sur la notice, qui precède. ib. 3. p. 308.

Magnetische Wirkungen.

a. Magnetisiren des Stahls (siehe oben pag. 160. 167.).

Llambias, Instit. 1834. No. 82. Pogg. Ann. 34. p. 83.

b. Ablenkung der Magnetnadel durch den verzögerten Strom.

Colladon, déviation de l'aiguille aimantée par la courant d'une machine électrique ordinaire et par l'électricité des nuages. Ann. de Ch. et de Ph. 32. p. 62. Pogg. Ann. 8. p. 336.

Faraday, Experimental Researches §. 289—307. Pogg. Ann. 29. p. 184.

Riess, Repertorium 2. p. 51.

Inductionserscheinungen.

(siehe oben pag. 166. 168.)

Einfluss auf Phosphorescenz.

Lane, Pristley Geschichte der Elektricität. p. 197.

Canton, an easy method of making phosphorus, that will imbibe and emit light, like the Bolognian stone, with experiments and observations. Ph. Tr. 58. p. 337.

Wilson, a series of experiments relating to the phosphori and the primatic colours. London 1775. 4.

Morgan, observations on phosphoric light. Ph. Tr. 1785. p. 208.

Skrimshire, experiments on the phosphorescent effects of electricity upon different bodies. Nicholson Journ. 15. p. 281., 16. p. 101., 19. p. 153.

Pearsal, experiments on the communication of phosphorescence and colour to bodies by electricity. Roy. Inst. 1. p. 77., 1831 p. 267. Pogg. Ann. 20. p. 252., 22. p. 566.

Heinrich, die Phosphorescenz der Körper oder die im Dunkeln bemerkbaren Lichtphaenomene der anorganischen Natur. Nürnberg 1810,

Becquerel, von einigen neuen Eigenschaften des elektrischen

Lichts in Bezug auf Phosphorescenz. Compt. rend. 8. p. 216. Pogg. Ann. 48. p. 543.

Becquerel u. Biot, über die Natur der vom elektrischen Licht ausgehenden und in der Ferne Phosphorescenz erregenden Strahlen. Compt. rend. 8. p. 223. Pogg. Ann. 48. p. 549.

Becquerel 2, Untersuchnngen über die Hervorrufung der Phosphorescenz und über verschiedene Eigenschaften des elektrischen Fnnkens. bibl. univ. n. s. 20. p. 344. Pogg. Ann. 48. p. 540.

Physiologische Wirkungen.

Cavendish, some attempts to imitate the effects of the torpedo. Ph. Tr. 1776. p. 196.

Robison, Mechanical Philosophy. vol. 4.

Volta, fortgesetzte Versuche über die Elektricität. Gilb. Ann. 14. p. 261.

van Marum, tweede Vervolg der proefnemingen gedaan met Teylers Electrisir-Maschine. Haarlem 1795. 4.

Galvanische und elektrische Versuche an Menschen und Thierkörpern angestellt von einer medizinischen Privatgesellschaft zu Mainz. Frankf. 1829. 4. 50 S.

Hemmer, elektrische Versuche mit belegten Thieren. Com. Acad. Theod. Palat. 5. p. 158.

Abilgaard, tentamina electrica in animalibus instituta. Coll. Soc. Med. Havniens 2. p. 157.

Veratti, de animalibus electrico ictu percussis. Com. Bon. 7. p. 41.

van Marum, Tilloch. Phil. Mag. 8. p. 194. 318. Second Continuation. Harlem 1795. 4.

Achard, mémoire renferment le recit de plusieurs expériences électriques faites dans différentes vues. Mém. de Berl. 1781. p. 9.

Medicinische Anwendung.

Lower, electricity rendered useful. London 1760. 8.

Krünitz, Verzeichniss der vornehmsten Schriften von der Elektricität und den elektrischen Kuren. Leipzig 1769. p. 159. Nr. 350—472.

Hartmann, die angewandte Elektricität bei Krankheiten des menschlichen Körpers. 1770 8.

Cavallo, essay on the theory and practice of medical electricity. London 1780.

Vivenzio, Teoria e pratica del elettricita medica. Napoli 1784. 4. 158 S.

Bertholon, de l'électricité du corps humain dans l'état de santé et de maladie. 2. vol. 8. Paris 1786.

Spengler, Briefe welche einige Erfahrungen der elektrischen Wirkungen in Krankheiten enthalten. Copenhagen 1754. 8.

Kühn, Geschichte der medicinischen und physikalischen Elektricität. Leipzig 1785. 2 vol.

Boeckmann, über die Anwendung der Elektricität bei Krankheiten. Durlach 1787.

v. Barneveld, medicinische Elektricität. üb. Leipz. 1787. 8.

Kreyenhoff, de l'application de l'électricité à la medicine. 1788. 4.

Deimann, von den guten Wirkungen der Elektricität in verschiedenen Krankheiten mit Zusätzen v. Kühn. Kopenhagen 1793. 2 vol.

Einfluss auf die Vegetation.

Bertholon, de l'électricité des végétaux übers. Leipzig 1785. 8. 301 S.

Ingenhouss, Versuche mit Pflanzen. 3 vol. 1778—1790.

Kies et Koestlin, de effectibus electricitatis. Tübingen 1775.

VIII. Atmosphärische Elektricität.

1. Bei heiterm Himmel (siehe Elektrometer).

le Monnier, observations sur l'électricité de l'air. Mém. de Paris 1752. p. 233. (tägliche Periode.)

Mazéas, observations upon the electricity of the air made at the chateau de Maintenon. Ph. Tr. 1753. p. 377. (Drachen.)

Beccaria, della elettricita terrestre atmospherica a cielo sereno osservazioni. 54 S. 4.

Ronayne, account of some observations on atmospherical electricity in regard of fogs, mists etc. with some remarks by Henley. Ph. Tr. 1772. p. 137.

Cavallo, extraordinary electricity of the atmosphere observed at Islington in Oktober 1775. Ph. Tr. 1776. p. 407.
Cavallo, new electrical experiments. ib. 1777. p. 48.
Bennet, Ph. Tr. 1788. p. 288. (Anwendung der Flamme als Collector.)
Saussure, voyages dans les Alpes §. 294. 648. 783. 791—836. (geschleuderte Kugel.)
Volta, meteorologische Briefe (Rauchsäule).
Read, summary view of the electricity of the earth and atmosphere. London 1793. Ph. Tr. 1791. p. 185. 1792. p. 225. (feste Zuleitstange.)
v. Gersdorff, Beobachtungen der atmosphärischen Elektricität zu Meffersdorff in der Oberlausitz nebst einigen daraus gezogenen Resultaten. Görlitz 1802. 4. 108 S.
Schübler, Bestimmung der täglichen Perioden der atmosphärischen Elektricität. Schweigg. Journ. 1. p. 123.
Schübler, Resultate einer Reihe von Untersuchungen über die atmosphärische Elektricität ib. 8. p. 21.
Schübler, Untersuchungen über einige Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität in den Alpen ib. 9. p. 347.
Schübler, Bemerkungen über elektrometrische Beobachtungen ib. 19. p. 1.
J. Davy, some observations on atmospheric electricity. Edinb. Tr. 1836.
Crosse, Encyclop. Edinb. Art. Electricity p. 486.
Colladon, déviation de l'aiguille aimantée par l'électricité des nuages (Galvanometer als atmosphärisches Elektroskop). Ann. de Ch. et de Ph. 32. p. 62. Pogg. Ann. 8. p. 336.
Arago, Observations in Becquerel traité de l'électricité. 4. p. 93.
Becquerel et Breschet, ib. 4. p. 110. (abgeschossener Pfeil als Collector.)
Weekes, Journal in Transact. of the El. Soc., apparatus p. 41.
Plantamour, mémoire sur l'électricité atmosphérique Arch. de l'élect. 1. p. 560.

2. Theorien.

Volta, meteorologische Briefe und Opera I. (durch Verdampfung.)
Saussure, voyages dans Alpes II. §. 805.

Erman, kritische Beiträge zur atmosphärischen Elektrometrie. Gilb. Ann. 15. p. 385.

Erman, über den wechselseitigen Einfluss des Elektricität und Wärmethätigkeit. Abh. der Berl. Akad. 1819. p. 123. (gegen Volta.)

Erman, über eine eigenthümliche reciproke Wirkung der zwei entgegengesetzten elektrischen Thätigkeiten. ib. 1818. p. 351

Pouillet, mémoire sur l'électricité des fluides élastiques et une des causes de l'électricité de l'atmosphère. Ann. de Ch. et de Ph. 35. p. 401. Pogg. Ann. 11. p. 417.

Pouillet, sur l'électricité qui se développe dans les actions chimiques et sur l'origine de l'électricité de l'atmosphère. ib. 36. p. 5. Pogg. Ann. 11. p. 442.

Peltier, recherches sur la cause des phénomènes électriques de l'atmosphère et sur les moyens d'en receuillir la manifestation. Ann. de Ch. et de Ph. 1842. 4. p. 385.

Gewittererscheinungen.

Hartmann, von der Verwandschaft und Aehnlichkeit der elektrischen Kraft mit den erschrecklichen Lufterscheinungen. Hannover 1759. 8.

Bertholon, de l'électricité des météores. Paris. 2. vol. 1787. über 1792. 8. 2 vol. Leipzig.

Poncelet, la nature dams la formation du tonnerre. Paris 8. 1766.

Maffei, della formazione dei fulmini. Verona 1747. 4.

Barberet, dissertation sur le rapport qui existe entre les phénomènes du tonnerre et ceux de l'électricité. Bourd. 1750. 4.

Gardini, de influxu electricitatis atmosphaerici.

Winkler, Abhandlung von dem elektrischen Ursprug des Wetterleuchtens. 1746.

Mylius, on extracting electricity from clouds. Ph. Tr. 1752. p. 559.

Watson, a letter concerning the electrical experiments made in England upon thunderclouds. Ph. Tr. 1752. p. 567.

Deluc, über die Schwierigkeiten in der Meteorologie. Gren. Journ. 4. p. 277.

de Romas, mémoire ou après avoir donné un moyen aisé pour élever fort haut et à peu de frais un corps électrisable isolé, un cerf volant, on rapporte des observations frappantes, qui

prouvent que plus le corps est élevé au dessus de la terre, plus le feu de l'électricité est abondant. Mém. prés. 2. p. 339. 4. p. 514.

Prince de Galitzin, observations sur l'électricité naturelle par le moyen d'un cerf-volant. Act. Acad. Petr. 1778. p. 2. h. 76.

Franklin, letter concerning an electrical kite. Ph. Tr. 47. p. 565.

Lining, answer to several queries concerning his experiment of electricity with a kite. Ph. Tr. 48. p. 757.

Zandeteschi, della polarizatione dei conduttori isolati e di un nuovo apparachio per esplorare l'elettricita atmosferica chiamato elettro magnetometro. Milan 1837. 8.

Ettrick, on a new isolator for atmospheric electric apparatus. Sturg. Ann. 1. p. 378.

Sturgeon, Lond. and Edinb. Phil. Mag. 5. p. 418.

Dove, über die Discontinuität der Blitze. Pogg. Ann, 35. p. 379.

Faraday, über einige vermeintliche Formen des Blitzes. Lond. and Ed. Ph. Mag. 19. p. 104. Pogg. Ann. 54. p. 98.

Fusinieri, mémoire sur le transport des substances pondérables par la foudre. Bibl. univ. 48. p. 371. 49. p. 1.

Magnetisirende Wirkungen des Blitzes.

Franklin, letters on electricity. p. 90.

Franklin, on the effect of lightning. Ph. Tr. 1751. p. 289.

Beccaria, letter del elettricismo p. 252. 262.

Dod, an account of an extraordinary effect of lightning in communicating magnetism. Ph. Tr. 39. p. 74.

Fargeau, note sur une chute de la foudre qui a produit des effets magnétiques remarquables. Compt. rend. 7. Aout 1843.

Bremond, an account of a file rendered magnetical by lightning. Ph. Tr. 41. p. 614.

Waddel, on the effect of lightning in destroying the polarity of the mariners compass, with some remarks by Knight. Ph. Tr. 1749. p. 111.

Chemische Wirkungen der atmosphär. Elektricität.

Barry, on the chemical action of atmospheric electricity. Ph. Tr. 1831. p. 195. Pogg. Ann. 27. p. 478.

Bonijol, biblioth. univ. Oct. 1831. p. 213.

Blitzröhren.

Hermann, Maslographia. Brieg. 1711.

Fiedler, über Blitzröhren und ihre Entstehung. Gilb. Ann. 55. p. 121., 61. p. 235., 68. p. 209., 71. p. 301., 74. p. 213.

Hagen, Bericht von der Bildung einer Blitzröhre durch den Blitz zu Rauschen in Ostpreussen. Gilb. Ann. 74. p. 325.

Irton, Ausgrabung von Blitzröhren zu Drigg in Irland. ib. 74. p. 218.

Pfaff, beobachtete Entstehung einer Blitzröhre durch den Blitz. ib. 72. p. 111.

Savart, Hachette et Beudant. Pogg. Ann. 13. p. 117. (künstliche Nachbildung derselben.)

Ribbentrop, über die Blitzröhren oder Fulguriten und besonders über das Vorkommen derselben am Regensteine bei Blankenburg. Braunschweig 1830. 8. 46. S.

Blitzröhren in der Sahara gefunden. Poggendorff Annal. 10. p. 483.

Blitzableitung.

Franklin, sur le tonnere et sur la méthode que l'on employe communément aujourdhui en Amérique, pour garantir les hommes et les batimens de ses effects desastreux. Oeuvres 1. p. 250. 1767.

Lind, maison d'épreuve du petit tonnerre. ib. 1. p. 302.

Watson, some suggestions concerning the preventing the mischiefs which happen to ships and their masts by lightning. Ph. Tr. 52. p. 629.; 54. p. 201.

Wilson, considerations to prevent lightning from doing mischief to great works, high buildings and large magazines. Ph. Tr. 54. p. 247. 1773. p. 49. 1779. p. 160.

Nairne, experiments in electricity, being an attemp to shew the advantage of elevated conductors. Ph. Tr. 1778. p. 823.

Lord Mahon, principes de l'électricité. 19 partie p. 180.

Mémoires sur les verges ou barres métalliques destinées à garantir les édifices des effets de la foudre. Mém. de Par. 1770. p. 63.

Winkler, programma de avertendi fulminis artificio. Leipzig 1753. 4.

Toderini, filosofia Frankliana delle punte preservatrici dal fulmine. Modena 1770, 6. 65 S.

Toaldo, dei conduttori per preservare gli edifizi da fulmini. Venez. 1778. 4. 104 S.

Reimarus, vom Blitze. Hamburg 1778. 8. 678 S.

Reimarus, Ausführliche Vorschriften zur Blitzableitung. Hamburg 1794. 8. 386 S.

Landriani, dell' utilita die conduttori elettrici. Milano 1785. 4. übers. Wien 1785. 8.

Guden, von der Sicherung wider die Donnerstrahlen. Wien 1774.

Hemmer, Anleitung Wetterableiter an allen Gattungen von Gebäuden auf die sicherste Art anzulegeu. Offenbach 1786. 8.

Boeckmann, über die Blitzableiter. Karlsruhe 1791. 8.

Lutz, Unterricht vom Blitze und Wetterableitern. 1783. 8.

Lutz, Lehrbuch der theoretischen und praktischen Blitzableitungslehre bearb. v. Gütle. 1804. 8. 2 vol.

Gross, Grundsätze der Blitzableitungskunst. Leipzig 1796.

Achard, Kurze Anleitung ländliche Gebäude vor Gewitterchäden sicher zu stellen. Berlin 1798.

Gütle, neue Erfahrungen über die beste Art Blitzableiter anzulegen. Nürnb. 1812.

v. Hauch, von der Luftelektricität besonders mit Anwendung auf Gewitterableiter. Kopenhagen 1800.

Gily und Eytelwein, kurze Anleitung auf welche Art Blitzableiter an den Gebäuden anzulegen sind. Berlin 1802. 8.

Bodde, Grundzüge zu der Theorie der Blitzableiter. Münster 1804. 8.

v. Unterberger, nützliche Anmerkungen von den Wirkungen der Elektricität und Gewittermaterie. Wien 1811. 8.

v. Imhof, theoretisch praktische Anweisung zur Anlegung zweckmässiger Blitzableiter. Münch. 1816. 8.

A report of the Committee (Cavendish, Watson, Franklin) appointed to consider of a method for securing the powder magazine at Purfleet street from lightning. Ph. Tr. 1773. p. 42.

Gay-Lussac, Instruction sur les paratonners. Ann. de Ch. et de Ph. 26. p. 258. Pogg. Ann. 1. p. 403.

Murray, treatise on atmospheric electricity, including observations on lightning-rods and paragrêles. London 1828. 8., traduit par Riffault. Paris 1831.

Preibsch, über Blitzableiter, deren Nutzbarkeit und Anlegung. Leipz. 1830. 46. S. 8.

Report of the Committee apppointed by the admirality to examine the plans of lightning conductors. Sturg. Ann. 5. p. 1.

Sturgeon, on marine lightning conductors. ib. 4. p. 164.

Roberts, on lightning conductors particularly as applied to vessels. ib. 1. p. 468. 2. p. 241.

Harris, observations on the effect of lightning on floating bodies, with an account of a new method of applying fixed and continuous conductors of electricity to the masts of ships. London 1823. 8.

Harris, on the utility of fixing lightning conductors in ships. Plymouth 1830. 8.

Harris, on lightning conductors and on certain principles in electric science Sturg. Ann. 4. p. 310. Phil. Mag. 16. p. 116. 404., 17. p. 370. 452., 18. p. 51.

Sturgeon, an analysis of Mr. Harris investigation of Sturgeons 4 memoir. Ann. of El. 4. p. 414.

Harris, on the course of electrical discharge and on the effects of lightning on certain ships. ib. 5. p. 41. 4. p. 484.

Sturgeon, letter to Snow Harris on marine lightning conductors. ib. 4. p. 322. 496., 5. p. 53. 220.

Arago, sur le tonnerre. 410 S.

Tetens, über die beste Sicherung seiner Person bei einem Gewitter. Bützow 1774. 8.

Lichtenberg, Verhaltungsregeln bei nahen Donnerwettern. 1778. 8.

Gütle, allgemeine Sicherheitsregeln für Jedermann bei Gewittern. Merseburg 1805.

Hemmer, der Rathgeber, wie man sich vor Gewittern in unbewaffneten Gebäuden verwahren soll. Mannheim 1809. 8.

Analogie elektrischer und magnetischer Erscheinungen vor Entdeckung des Elektromagnetismus.

van Swinden, recueil de mémoires sur l'analogie de l'électricité et du magnétisme. Haag 1784. 3 vol. 8. (van Swinden,

Steiglehner, Hübner.) Neue Abhandl. der Bairisch. Akademie II. p. 1. 227. 351.

Aepinus, sermo academicus de similitudine electricitatis et magnetismi. Petrop. 1760.

Aepinus, similitudinis offectuum vis magneticae et electricae novum specimen. Nov. Com. Acad. Petr. 10. p. 296.

Cigna, dissertatio de analogia electricitatis et magnetismi. Misc. Soc. Taur. 1. p. 43.

Beraut, dissertation sur le rapport, qui se trouve entre la cause des effets de l'aimant et celle des phénomènes de l'électricité. Prix de l'Acad. de Bourd. T. 2.

Wilcke, Abhandlung von Erregung der magnetischen Kraft durch die Elektricität. Schwed. Abh. 1766. p. 306.

Ritter, System der elektrischen Körper. p. 379.

Erman, Beiträge über elektrisch-geographische Polarität, permanente elektrische Ladung und magnetisch chemische Wirkungen. Gilb. Ann. 26. p. 1. 121.

Yelin, über Elektricität und Magnetismus als identische Urkräfte. München 1818.

Magnetismus.

Allgemeine Werke.

Falconer, dissertation historique et critique sur ce que les anciens ont cru de l'aimant. Mém. de l'Acad. des Inscript. 4. p. 613.

Peregrinus, de magnete, seu rota perpetui motus. Augsb. 1558. 4.

Gilbert, tractatus sive physiologia nova de magnete magneticisque corporibus et magno magnete tellure sex libris comprehensus. London 1600.

Ridley, a short treatise of magnetical bodies and motions. London 1613. 4.

Lieutaud, magnetologia. Lugd 1668. 4.

Cabaeus, philosophia magnetica f. Ferrara 1629.

Kircher, magnes sive de arte magnetica opus tripartitum. Coeln. 1643. 2 ed. 4.

Scarella, de magnete. 2 vol. 4. Brescia 1759.

Esperienze intorno alla calamita. Saggi di Acad. del Cimento 1667. p. 207. ed Muschenbroek 2. p. 74.

Lanzoni, de magnetis virtute non interrupta ab alii succo. Misc. Acad. Nat. Curios. 1694. p. 60.

du Fay, mémoires sur l'aimant. Mém. de Paris 1728. p. 355. 1730. p. 142., 1831. p. 417.

du Fay, Anmerkungen über verschiedene mit dem Magnet angestellte Versuche. üb. Erfurt 1748. 8.

Pièces qui ont remporté la prix de l'Acad. de Paris en 1743 et 1746 sur la meilleure construction des boussoles et sur l'attraction de l'aimant avec le fer. Paris. 1748. 4. (Euler, Daniel und Johann Bernoulli, Dutour.)

Gautier, mémoire sur l'aimant. Mém. de la Soc. de Nancy. 2. p. 1.

Schwighard, ars magnetica.

Penrose, an essay on magnetism. London 1753. 8.

Eberhard, Versuch einer magnetischen Theorie. Leipz. 1720. 4.

Cooper, experimental magnetism. 1761. 8.

Muschenbroek, dissertatio physica experimentalis de magnete. 270 S. 4. in: Dissertationes. Wien 1756.

Rinman, Geschichte des Eisens. übers. v. Georgi.

Franklin, queries and conjectures relating to magnetism and the theory of the eath. Trans. of the Americ. Soc. 3. p. 10.

Kirwan, thoughts on magnetism. Irish. Transact. 6. p. 177. Gilb. Ann. 6. p. 391.

Brugmann, tentamina philosophica de materia magnetica ejusque actione in ferrum et magnetem. Franeker 1765. 4. übers. v. Eschenbach. Leipzig 1784. 8. 307 S.

Brugmann, magnetismus seu de affinitatibus magneticis observationes. Leyden 1778. 4. übers. v. Eschenbach 1781. 8. 167 S.

Adams, an essay on magnetism. London 1753. 4. übers. Leipzig 1785.

Lacam, thougts on magnetism. 8.

Prevost, de l'origine des forces magnétiques. Genf 1788. übers. Halle 1794. 8.

Hauy, exposition de la théorie de l'électricité et du magnétisme d'après les principes de Mr. Aepinus. übers. v. Murhardt. Altenburg 1801.

Roucher-Deratte, traité sur l'électricité le galvanisme, le magnétisme etc. 1803. 8.

v. Löwenörn, über den Magnet ein Beitrag zur Erklärung der Magnetnadel. Kopenhagen 1802.

Cavallo, treatise on magnetism in theory and practice with original experiments. London 1787. 8. übers. Leipz. 1788. 8.

Robison, Mechanical Philosophy.

Barlow, an essay on magnetic attractions. London 1823. 2 ed.

Becker, der mineralische Magnetismus und seine Anwendung in der Heilkunst. Mühlhausen 1729. 8. 202 S.

Peytavin, essai sur la constitution physique des fluides élastiques et magnétiques. Paris 1830. 8.

Barlow, Magnetism. Art. d. Encyclop. Metropol.

Roget, Magnetism. Library of the Soc. for the diff. of usef. Knowl. 8. 96 S.

Brewster, a treatise on magnetism. Edinb. 1837. 8. 365 S.

Becquerel, Traité de l'électricité et du magnetisme. Paris 7 vol. seit 1834.

Theorien.

Descartes, Principia philosophiae. 4. §. 133. (schraubenförmige Ströme vom Nordpol zum Südpol.)

Dalancé, Traité de l'aimant. Liège 1691. 4. und Acta Erudit. 1687. Aug. p. 424. (Canäle mit Klappen.)

du Fay, observations sur quelques expériences sur l'aimant. Mém. de Paris 1728. p. 355.

du Tour, discours sur l'aimant. Pièces de Prix de l'Acad. de Par. 5. 11. p. 49.

du Tour, observation sur le tourbillon magnétique. Mém. prés. 3. p. 233.

Daniel et Johann Bernoulli, nouveaux principes de mecanique et de physique tendant à expliquer la nature et les propriétés de l'aimant. Pièces de prix de l'Acad. de Par. 5. 12. p. 115.

Euler, dissertatio de magnete. ib. 5. 11. und Opusc. 3. 1744.

Wilcke, Tal om magneten. Stockholm 1764. 8. u. Schwed. Abh. 1766. p. 326. (zwei magnetische Materie.)

Aepinus, tentamen theoriae electricitatis et magnetismi. 1759. 4. 390 S. (eine einzige magnetische Materie.)

van Swinden, tentamina theoriae mathematicae de phaenomenis magneticis. Franek. 4.

Kratzenstein, Lichtenb. Magaz. 1. 4. p. 132. (schwingende Bewegung der megnetischen Materie.)

Gabler, theoria magnetis. Ingolst. 1781. 8. (Magnetisiren ist Anordnen polarisirter Theilchen.)

Rittenhouse, account of some experiments on magnetism. Americ. Transact. 2. p. 178.

Coulomb, Mémoires 1. 2. 7. sur l'électricité et le magnétisme. 1785. p. 569. 578., 1789. p. 455.

Coulomb, mémoire sur le magnétisme. de la Metherie observ. sur la physique 43. p. 249. Gren. neues Journ. d. Ph. 2. p. 298.

Gay Lussac, Biot Traité de phys. 3. p. 8. (Magnetisiren bringt keine Volumenveränderung des Eisens hervor.)

Poisson, mémoire sur la théorie du magnétisme. Mém. de l'Acad. 1821. 22. p. 247. 448. (Théorie des fluides non transportables.)

Poisson, extrait d'un mémoire sur la théorie du magnétisme. Ann. de Ch. et de Ph. 25. p. 113.

Ampère, mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques. Mém. de Par. 1823. p. 175.

Eschenmayer, Versuch die Gesetze magnetischer Erscheinungen aus Sätzen der Naturmetaphysik mithin a priori zu entwickeln. Tübing. 1798. 8.

Weinhold, physikalische Versuche über den Magnetismus als scheinbaren Gegensatz des elektrochemischen Processes der Natur. Meissen 1819. 8.

Abnahme der magnetischen Kraft mit der Entfernung.

Hawksbee, an account of experiments concerning the proportion of the power of the loadstone at different distances. Ph. Tr. 1712. p. 506.

Taylor, account of an experiment in order to discover the law of the magnetical attraction. Ph. Tr. 1715. p. 294.

Muschenbroek, dissertatio de magnete u. Phil. Trans. 1725. p. 370.

Kraft, de viribus attractionis magneticae experimenta. Comm. Acad. Petrop. 12. p. 276.

Tob. Mayer, Gött. gel. Anzeig. 1760.

Lambert, analyse de quelques expériences faites sur l'aimant. Mém. de Berlin 1766. p. 22.

Lüdecke, de attractionis magnetum naturalium quantitate. Witt. 1779.

della Bella, Memoria 1. 2. sobre a forza magnetica. Mem. de Lisboa 1. p. 85. 116.

Coulomb, mémoire ou l'on détermine suivant quelles loix le

fluide magnétique ainsi que le fluide électrique agissent soit par repulsion, soit par attraction. Mém. de Paris 1785. p. 569. 578.

Bidone, magnetische Boussole. Gilb. Ann. 64. p. 374. Mém. de Turin 1811.

Hansteen, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde. p. 119.

Harris, experimental inquiries concerning the laws of magnetic forces. Edinb. Trans. v. XI. Edinb. Journ. of Sc. new Ser. 3. p. 35.

Gauss, intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gott. 1833.

Gauss, allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Res. des magn. Vereins 1839. p. 50. (Anstatt einer beliebig gegebenen Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten innerhalb eines von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raumes lässt sich eine Vertheilung derselben auf der Fläche selbst substituiren, deren Wirkung für alle Punkte des äussern Raumes dieselbe ist als die Wirkung jener.)

Besondere Fälle.

Blondeau, mémoire sur l'effet des aiguilles aimantées placées l'une au dessus de l'autre. Mém. de Brest. 1. p. 385.

Blondeau, mémoire sur l'effet de deux aiguilles aimantées, l'une sur l'autre, lorsque librement suspendues elles se trouvent dans leur sphère d'activité reciproque, a peu près dans le même plan horizontal. ib. 1. p. 401.

Gauss, Vorschriften zur Berechnung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in die Ferne ausübt. Result. d. magn. Ver. 1840. p. 26.

Lloyd, on the mutual action of permanent magnets considered chiefly in reference to their best relative position in an observatory. Irish. Trans. 19. p. I. II.

Gauss, über ein Mittel, die Beobachtung von Ablenkungen zu erleichtern. Res. de magn. Ver. 1839. p. 52.

Magnetische Figuren.

du Tour, sur les différences qu'apportent les secousses données à

ou carton sur lequel on étend de la limaille de fer à l'arrangement de cette limaille presentée à la pierre d'aimant. Mém. prés. 1. p. 375.

Bazin, descriptions des courant magnétiques dessinés d'après nature en 15. planches. Strasburg 1753. 4.

Muschenbroek, dissertatio de magnete. Exper. 71 seq.

Lambert, sur la courbure du courant magnétique. Mém. de Berl. 1766. p. 49.

Robison, mechanical philosophy. 4. p. 350.

Leslie, geometrical analysis.

Roget, on the geometric properties of the magnetic curve with an account of an instrument for its mechanical description. Roy. Inst. 1831. p. 311.

Horner. Art. Magnetismus des neuen Gehl. Wört. p. 824.

Haldat, recherches sur la force coercitive des aimants et les figures magnétiques. Ann. de Ch. et de Ph. 42. p. 33.

Haldat, recherches sur les forces attractives et repulsives des aimants. Mém. de l'Acad. de Nancy 1839.

Wirkung des Magnets durch andere Substanzen hindurch.

Muschenbroek, dissertatio de magnete. p. 64.

Harris, on the influence of screens in aresting the progress of magnetic action. Ph. Tr. 1831. p. 497.

Haldat, recherches sur l'incoercibilité du fluide magnétique. Mém. de l'Acad. de Nancy 1830.

Scoresby, Jameson Edinb. new phil. Journ. 1832. No. 24. p. 319. (Bestimmung der Mauerndicke durch die Ablenkung der Magnetnadel.)

Wirkung eiserner Hüllen.

Scaramella, neue Gehler C. p. 196.

Jennings, insulating compass. Encycl. Metrop. 1. p. 765.

Dove, Untersuchungen über Inductionselektricität p. 31.

Natürliche Magnete.

Hauy, observations sur les aimants naturels. Soc. Philom. Ann. 5. p. 34.

Hermelin, über das Verhalten des Magnets in Gruben. Schwed. Abh. 1767. p. 329.

Leonhard, Handbuch der Oryktognosie. 1825. p. 83.

Natürliche Magnete grosser Kraft. Pogg. Ann. 24. p. 639.

Analysen von Berzelius. Pogg. Ann. 23. p. 346., von Kobell 23. p. 347.

Magnetismus der Lage.

J. C., a paper about magnetism, concerning the changing and fixing the polarity of a piece of iron. Ph. Tr. 1694. p. 257. (bei glühendem Eisen stärker als bei kaltem.)

Grimaldi, traité de la lumière.

Savery, magnetical observations and experiments. Ph. Tr. 1730. p. 295.

Leuwenhoek, observations on the magnetic quality acquired by iron upon standing a long time in the same posture. Ph. Tr. 33. p. 72.

Marcel, an abstract of a letter concerning a way to communicate the magnetical virtue to iron and steel without the help of any loadstone whatsoever. Ph. Tr. 1732. p. 294.

la Hire, nouvelles remarques sur l'aiman et sur les aiguilles aimantées. Mém. de Par. 1705. p. 97.

du Fay, Suite des observations sur l'aimant. Mém. de Paris 1730. p. 142.

Aepinus, dissertatio de experimento quodam magnetico a du Fay descripto, Nov. Com. Acad. Petr. 9. p. 326. 340.

Canton, a method of making artificial magnets without the use of natural ones. Ph. Tr. 1751. p. 31.

Trullard, dissertation sur une nouvelle manière de faire les aimants artificielles d'une très grande force, sans le secour de l'aimant naturel. Mém. de Dijon 1. p. 66.

Richmann, de virtute magnetica absque magnete communicata experimenta. Nov. Com. Acad. Petr. 4. p. 235.

Poenitz, Worauf beruht das Magnetischwerden des Eisens bei mechanischer Behandlung und bei dem Ablöschen desselben. Gilb. Ann. 67. p. 319.

Vallermont, description de l'aimant, qui s'est trouvé dans le clocher neuf de Notre Dame de Chartres et expériences à faire sur la formation de l'aimant. Mém. de Paris 10. p. 731.

Heller, entdeckte Veränderungen des von der Erde im Eisen durch Vertheilung hervorgerufenen Magnetismus in ihrem Zusammenhange mit den Ständen der Sonne und des Mondes. Bericht der Münch. Akad. 1809. 4. p. 59.

Erman, Bemerkungen üher das Verhältniss des unmagnetischen Eisens zur tellurischen Polarität. Abh. der Berl. Akad. 1814. p. 134.

Lecount, description of the changeable magnetic properties possessed by all iron bodies. London 1820.

Scoresby, description of a magnetimeter being a new instrument for measuring magnetic attractions and finding the dip of the needle. Edinb. Ph. Journ. 1821. 4. p. 360. Gilb. Ann. 68. p. 260.

Scoresby, experiments and observations on the developement of magnetical properties in steel and iron by percussion. Ph. Tr. 1820. p. 241.

Baden Powell, an account of some experiments on the communication of magnetism to iron in different positions. Ann. of Phil. 1822. 3. p. 92. Gilb. Ann. 73. p. 245.

Barlow, on magnetic attractions. 2 edit.

Secundäre Wirkungen.

Barlow, Versuche und Sätze über den Magnetismus des Eisens. Gilb. Ann. 73. p. 1. Edinb. Phil. Jorn. 1. p. 344. (eine massive und hohle Kugel von gleicher Wirkung.)

Barlow, on the secondary deflection produced in a magnetized needle by an iron shell, in concequence of an unequal distribution of its magnetism. Ph. Tr. 1827. p. 276.

Schmidt, prüfende Untersuchungen über die von Hr. Barlow aufgefundenen Gesetze, nach welchen weiches Eisen auf die Magnetnadel wirkt. Gilb. Ann. 74. p. 225.

Christie, on the laws of the deviation ot magnetized needles towards iron. Ph. Tr. 1828. p. 325.

Poisson, théorie du magnétisme. Mém. de Par. 1821. 22.

Induction durch Magnetismus der Lage.

Faraday, Experimental Researches. Sec. Series.

Weber, Magnetismus des Eisens durch die Erde. Res. des magn. Ver. 1841. p. 85.

Lloyd, account of the magnetical observatory of Dublin and of the instruments and methods of observation employed there. Dublin 1842. 54 S. 4.

Santi Linari et Palmieri, sur les courants d'induction provenant de l'action de la terre. Compt. rend. 16. p. 1442. Pogg. Ann. 59. p. 641.

Erregung im Stahl.

Réaumur, expériences qui montrent avec quelle facilité le fer et l'acier s'aimantent, même sans toucher l'aimant. Mém. de Paris 1723. p. 81.

van der Steege, Bericht van de proefnemingen met den door kunst gemackten magneet. Verhand. van het Batav. Gen. 1. p. 110.

Remarques sur les aimans artificiels de Basle. Act. Helv. 2. p. 264.

le Noble, Aimans artificiels d'une très grande force. Mém. de Par. 1772. p. 17.

Fuss, observations et expériences sur les aimants artificiels, principalement sur la meilleure manière de les faire. Act. Acad. Petr. 1778. p. 35.

Rivière, traité sur les aimants artificiels. Paris 1752. 12.

Lalande, observations sur les nouvelles méthodes d'aimanter. Mém. de Paris 1761. p. 211.

Nebel, dissertatio de magnete artificiali. Ultraj. 1756. 4.

Savery, magnetical observations and experiments. Ph. Tr. 1730. p. 410.

Michell, Treatise on artificial magnets. London 1750. 8. (Doppelstrich von der Mitte aus.)

Klingenstierna et Brander. de magnetismo artificiali. Stockholm 1752.

Antheaulme, dissertation sur les questions, quels sont les prerogatives des aimans artificiels par rapport aux naturels, quel est la meilleure méthode de les faire. Petersburg 1760. 4.

Forthergill, account of the magnetical machine contrived by the late Godwin Knigth. Ph. Tr. 1776. p. 591. (Einfacher Strich mit zwei dem Stabe parallelen Magneten von der Mitte aus.)

du Hamel, façon singulière d'aimanter un barreau d'acier au

moyen duquel on lui a communiqué une force magnétique quelque fois triple de celle, qu'il aurait si on l'eut aimanté à l'ordinaire. Mém. de Paris 1745. p. 181. (Die streichenden Magnete geneigt, einfacher Strich von der Mitte aus aber auf 2 Stäbe die durch Anker weichen Eisens verbunden sind.)

Coulomb, resultat des différentes méthodes employées pour donner aux lames et aux barreaux d'acier le plus grand magnétisme. Mém. de l'Inst. 6. p. 399. (Magnetische Batterie von Stäben vereint durch Ansatzstücke von weichem Eisen.)

Biot, précis élémentaire de physique. 2. p. 57. (Fuss von weichem Eisen.)

Kater, on the best kind of steel and form for compass needles. Ph. Tr. 1821. p. 104. (Vergleichung der verschiedenen Methoden.)

Aepinus, tentamen theoriae magnetismi. Petersb. 1759. (Duhamels Methode mit an die Stäbe quer angesetzten Magneten.)

Aepinus, descriptio artificii vires magnetum naturalium insigniter augendi. Act. Acad. Mog. t. 2. p. 255.

Quetelet, recherches sur les degrés successifs de force magnétique qu'une aiguille d'acier reçoit pendant les frictions multiples qui servent à l'aimanter. Ann. de Ch. et de Ph. 53. p. 248.

Barlow, an essay on magnetic attractions. London 1823. (Kreisstrich auf ein Rechteck von Stahlstäben angewendet.)

Sturgeon, on the distribution and retention of magnetic polarity in metallic bodies. Ph. Mag. 11. p. 270. 324. Lond. and Ph. Mag. 1. p. 31.

Aimé, note sur un nouveau procédé d'aimanter (glühender Stahlstab abgekühlt zwischen den Polen eines Elektromagneten).

Tremery, observations sur les aimants elliptiques. Soc. Philom. Ann. 5. p. 44.

Streichen der Hufeisen.

Aepinus, tentamen theoriae magnetismi. (Kreisstrich).

Fischer, praktische Anleitung zur vortheilhaften Verfertigung künstlicher Magnete. Heilbronn 1833.

Hoffer, über das Magnetisiren hufeisenförmiger und gerader Stahlstangen. Baumg. Journ. 2. p. 197. 360. u. 3. p. 198.

Mohr, über ein Verfahren kraftvolle Hufeisenmagnete durch Streichen zu bereiten. Pogg. Ann. 36. p. 542.

Böttger, passendste Form des Ankers eines Hufeisenmagnet. Beiträge zur Physik und Chemie p. 10.

Tragkraft der Hufeisenmagnete.

Cramer, Versuche über die anziehende und abstossende Kraft in verschiedenen Entfernungen und über ihr Verhältniss zur unmittelbaren Tragkraft der Magnete. Pogg. Ann. 52. p. 298.

Haecker, Versuche über das Tragvermögen hufeisenförmiger Magnete und über die Schwingungsdauer geradliniger Magnetstäbe. Pogg. Ann. 57. p. 321.

Baumgärtner, über den Einfluss der Gleichförmigkeit der Masse auf ihre Empfänglichkeit für Magnetismus. Baumg. Journ. 3. p. 66.

Transversalmagnete.

Prechtl, über die wahre Beschaffenheit des magnetischen Zustandes des Schliessungsdrathes in der Voltaschen Säule. Gilb. Ann. 67. p. 265.

Schmidt, Erscheinungen, welche die Prechtlschen Transversalmagnete zeigen und Entwickelung ihrer Gesetze. Gilb. Ann. 71. p. 399.

Magnete aus Eisenfeilicht.

Chevalier, observation sur la rouille des fer convertie en aimant. Mém. de Paris 1731. p. 20.

Wilson, account of Dr. Godwin Knight's method of making artificial loadstones. Ph. Tr. 1779. p. 51.

Seebeck, über die magnetische Polarisation verschiedener Metalle, Alliagen und Oxyde zwischen den Polen starker Magnete. Abh. der Berl. Akad. 1827. p. 147.

Haldat, recherches sur la force cöercitive et la polarité des aimants sans cohésion. Ann. de Ch. et Ph. 65.

Vertheilung des Magnetismus in einem geradlinigen Magnete.

Coulomb, Mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Mém. de Paris 1789. p. 468.

Biot, Traité de physique exp. et math. III. p. 70. (Gleichung der Intensitätscurve.)

Kupfer, recherches sur la distribution du magnétisme libre dans les barreaux aimantés. Ann. de Ch. et de Ph. 36. p. 50.

Steinhäuser, de magnetismo telluris. 1. p. 24.

Becquerel, sur des fils très fins de platine et d'acier et sur la distribution du magnétisme libre dans ces derniers. Ann. de Ch. et de Ph. 22. p. 113.

Veränderung dieser Vertheilung.

Brugmans, philosophische Versuche üb. die magn. Mat. p. 74. (Punkte der Indifferenz während des Streichens.)

van Swinden, Tentamina theor. math. de phaen. magn. Spec. 1. (Culminirende Punkte.)

Christie, on the laws of the deviation of magnetized needles towards iron. Ph. Tr. 1828. p. 325.

Erman, Erzeugung von Elektromagnetismus durch blosse Modification der Vertheilung der Polarität in einem unbewegten Magnet. Abh. d. Berl. Akad. 1832. p. 17.

Magnus, über die Wirkung des Ankers auf Elektromagnete und Stahlmagnete. Pogg. Ann. 38. p. 417.

Besondere Magnetisirungserscheinungen.

van Swinden, de paradoxo phaenomeno magnetico, magnetem fortius ferrum purum quam alium magnetem attrahere. Neue Abh. der Bair. Akad. Phil. 1. p. 351.

van Swinden, recueil de mémoires sur l'analogie de l'électricité et du magnétisme. Haag 1784. 3 vol. 8. (Anziehung gleichartiger Pole.)

Quetelet, correspondence mathematique (ein schnell rotirender Magnet wirkt wie eine Scheibe von weichem Eisen.)

Poggendorff, über einige Magnetisirungserscheinungen. Pogg. Ann. 45. p. 353.

Haldat, notice sur la vitesse avec laquelle s'exerce l'influence magnétique. Mém. de l'Acad. de Nancy 1838.

Poggendorff, experimenteller Beweis, dass ein elektrodynamischer Schraubendrath noch kein Magnet ist. Pogg. Ann. 52. p. 386.

Weber, Beweglichkeit des Magnetismus im weichen Eisen. Res. d. magn. Vereins 1838. p. 118.

Einfluss der Wärme.

Canton, an attempt to account for the regular diurnal variation of the horizontal magnetic needle. Phil. Tr. 1759. p. 398.

Saussure, voyayes dans les Alpes. 1. p. 378.

Hansteen, Pogg. Ann. 3. p. 236., 9. p. 161., 17. p. 404. 432.

Christie, on the effects of temperature on the intensity of magnetic forces. Ph. Tr. 1825. p. 1.

Erman, über die magnetischen Verhältnisse der Gegend von Berlin. Abh. d. Berl. Akad. 1828 p. 149. (Magneteisenstein verliert weniger als gestrichne Stahlstäbe.)

Kupfer, recherches relatives à l'influence de la temperature sur les forces magnétiques. Ann. de Ch. et de Ph. 30. p. 113.

Kupfer, recueil d'observations magnétiques faites à St. Petersbourg. Petersburg 1837. 4. p. 619.

Kupfer, note relative à l'influence de la température sur la force magnétique des barreaux. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersb. 1843. 1. No. 11. (Boulat constant.)

Moser u. Riess, über den Einfluss der Wärme auf den Magnetismus. Pogg. Ann. 17. p. 403.

Weber, über den Einfluss der Temperatur auf den Stabmagnetismus. Result. des magn. Ver. 1837. p. 38.

Weber, Vorschlag die Variationen des Stabmagnetismus beim Bifilarmagnetometer unabhängig von der Kenntniss der Temperatur zu bestimmen. ib. 1840. p. 35.

Einfluss hoher Temperaturen.

Gilbert. de magnete III. p. 69. 124. ed. 1733.

J. C., a paper about magnetism. Pr. Tr. 1694. p. 257.

Scoresby, Edinb. Trans. 9. p. 254.

Barlow, on the anomalous magnetic action of hot iron between the white and blood red heat. Ph. Tr. 1822. p. 117. Gilb. Ann. 73. p. 229.

Seebeck, über eine von den Herrn Barlow und Bonycastle wahrgenommene anomale Anziehung der Magnetnadel durch glühendes Eisen. Abh. der Berl. Akad. 1827. p. 129.

Ritchie, experiments and observations on conduction. Ph. Tr. 1828. p. 373.

Coulomb, in Biot Traité de physique. 3. p. 106.

Magnetismus verschiedener Eisensorten.

Barlow, Ph. Tr. 1822. p. 117. Gilb. Ann. 73. p. 229.

Dove, über das Verhältniss des grauen und weissen Gusseisens zu Schmiedeeisen, hartem und weichem Stahl in Beziehung auf die durch dieselben hervorgebrachten Inductionserscheinungen. Bericht der Berl. Akad. 1839. p. 72.

Magnetismus des Nickel und Kobalt.

Bergmann, de Nicolo §. 4. Opuscula chemica. 2. p. 240., 3. p. 102.

Klapproth, Beiträge zur chemischen Kenntniss der Mineralkörper. 2. p. 142.

Ritter, über den Magnetismus des Eisens, Nickels, Kobalts und Chromiums. Gehlen neues Journ. 5. p. 393.

Seebeck, über eine Magnetnadel aus Kobalt und Magnetismus des Kobalts und Nickels. Gehlen Journ. 7. p. 208.

Chenevix, über den vorgeblichen Magnetismus des Nickels. Gilb. Ann. 11. p. 370. Nichols. Journ. 5. p. 287.

Laudriani, über die magnetische Eigenschaft des Kobalt-Königs. Mayer Saml. ph. Aufs. d. Böm. Ges. 3. p. 388.

Döbereiner, Gilb. Ann. 67. p. 223.

Gay Lussac, in Poisson mémoire sur le magnétisme.

Wollaston, on the apparent magnetism of metallic titanium. Ph. Tr. 1803. p. 400.

Dove, Untersuchungen im Gebiete der Inductionselektricität. p. 22. 46.

Muschenbroek, experiments made on the Indian magnetic sand. Ph. Tr. 1734. p. 297.

Butterfield, on magnetical sand. ib. 1698. p. 336.

Mayer, über die magnetische Kraft des krystallisirten Eisensumpferzes. Böhm. Gesellsch. d. Wiss. 1788. p. 238.

Hauy, Verzeichniss der Mineralien, welche nach magnetischer Einwirkung Eisengehalt zeigen. Gilb. Ann. 63. p. 111.

Magnetkiess. Gilb. Ann. 25. p. 69. 82., 27. p. 58., 44. p. 91.

Magnetismus andrer Metalle.

Brugmans, de affinitatibus magneticis obs. acad. 1778. 4.

Quintine, dissertation sur le magnétisme des corps. Prix de l'Acad. de Bourdeaux T. 3.

Lehmann, de cupro et orichalco magnetieo. Nov. Com. Acad. Petr. 12. p. 368.

Arderon, on the giving magnetism and polarity to brass. Ph. Tr. 1758. p. 774.

Cavallo, magnetical experiments and observations, to shew the properties of some metallic substances principally brass with respect to magnetism. Ph. Tr. 1786. p. 62., 1787. p. 6. Treatise on magnetism 1787. p. 283.

Ritter, einige Bemerkungen über die Cohäsion und über den Zusammenhang derselben mit dem Magnetismns. Gilb. Ann. 4. p. 15.

Coulomb, expériences qui prouvent que tous les corps obéissent à l'action magnétique, et que l'on peut mésurer l'influence de cette action sur les différentes espèces de corps. Journ. de phys. 54. p. 240. 367. 454. Gilb. Ann. 11. p. 367., 12. p. 194.

Coulomb u. Biot, über die Wirkung des Magnets auf alle Körper. Gilb. Ann. 64. p. 395.

Becquerel, sur les actions magnétiques exercées dans tous les corps par l'influence d'aimants très-énergiques. Ann. de Ch. et de Ph. 36. p. 337.

Lebaillif, bulletin universel. 8. p. 87.

Saigey, bull. univ. 9. p. 95.

Murray, om platinas magnetismus. Schwed. Abh. 1775. p. 350.

Goebel, magnetisches Platinerz. Schweigger Journ. 60. p. 415.

Muncke, neue magnetische Beobachtung am Messing. Pogg. Ann. 6. p. 361.

Seebeck, über die magnetische Polarisation verschiedener Metalle, Alliagen und Oxyde zwischen den Polen starker Magnetstäbe. Abh. d. Berl. Akad. 1827. p. 147.

Faraday, on the general magnetic relations and characters of the metals. Lond. and Ed. Ph. Mag. 14. p. 161. Pogg. Ann. 47. p. 218.

Pouillet, Elémens de physique. 3. ed. 1. p. 381.

Haldat, recherches sur la généralité de magnétisme, ou complement des expériences de Coulomb sur le même sujet. Mém. de l'Acad. de Nancy 1841.

Dove, über den Magnetismus der sogenannten unmagnetischen Metalle. Pogg. Ann. 54. p. 325.

Polarität von Gebirgsmassen.

v. Arnim, Uebersicht der magnetischen nicht metallischen Stoffe. Gilb. Ann. 5. p. 384.

v. Humboldt, über den polarisirenden Serpentinstein. Crelle Chemische Annalen 1797. p. 100.

Hardt, über den polarisirenden Serpentin vom Haideberg bei Zelle im Baireuth'schen. Gilb. Ann. 44. p, 89.

v. Schlottheim, Schreiben über die Eigenschaft verschiedner Steinarten auf den Magnet zu wirken. Crell. Ch. An. 1797. p. 105.

Wächter, neue Beobachtungen über magnetische Granitfelsen auf dem Harz. Gilb. Ann. 5. p. 376.

Zimmermann, Gilb. Ann. 28. p. 483.

Jordan, Erklärung der magnetischen Erscheinungen am Harzer Granit. Gilb. Ann. 26. p. 256.

Nöggerath, über die magnetische Polarität zweier Basaltfelsen in der Nähe von Nürburg in der Eifel. Schweig. Journ. 52. p. 221.

Gillet, description d'un feldspath rougeatre du Hartz, ayant les propriétés de l'aimant. Soc. Phil. an 6. p. 51.

Magnetische Apparate.

Compass, Bnsso e.

Klapproth, lettre à Mr. de Humboldt sur l'invention de la boussole.

Davies, on the history of the invention of the mariners compass. Thomson british annual 1837. p. 246.

Friberg, dissertatio de pyxide nautica 1743. 4.

Hansteen, Magnetismus der Erde. Einl. p. 3.

Grimaldi, dissertazione sopra al primo inventore della bussola. Diss. del Acad. di Cortona 3. p. 195.

Trombelli, de acus nauticae inventore. Com. Bonon. 2. 3. p. 333.

Collina, de acus nauticae inventore. ib. 2. 3. p. 372.

Lous, tentamen experimentorum ad compassum perficiendum et unicuique usui tam nautico quam terrestri accommendando. Hafniae 1734. 4.

Knight, description of a mariners compass, contrived by him. Ph. Tr. 1750. p. 505.

Smeaton, account of some improvements of the mariners compass, in order to render the card and needle, proposed by Dr. Godwin Knight. Ph. Tr. 1750. p. 513.

Bouguer, traité de navigation 1753.

du Hamel, différens moyens pour perfectioner la boussole. Mém. de Paris 1750 p. 154.

Zeiher, acus nauticae novae descriptio. Nov. Com. Acad. Petr. 8. p. 284.

Report on M'Cullagh sea compass. London 1778.

Romans, on an improved sea compass. Amer. Trans. 2. p. 396.

Gilbert, M'Culloch, Preston and Alexander Steuercompass in Barlow Magnetism. Encycl. Metrop. 1, p. 764.

Kater, on the best kind of steel and form for compass needles. Ph. Tr. 1821. p. 104.

Azimuthal Compass.

Degault, sur un compas azimuthal à reflection. 8.

Gilbert, patent azimuthal compass. Barlow Magnetism Enc. Metrop. 1. p. 766.

Kater, azimuth compass. Brewster treatise on magn. p. 327.

Jones, Gilb. Ann. 54. p. 197. 312.

Schmalkalder, Patent Boussole. Gilb. Ann. 49. p. 190., 54. p. 197.

Horner, eine kleine Verbesserung der Schmalkalder Boussole. Gilb. Ann. 75. p. 206.

Beobachtunngsmethoden der Declination auf dem Meere.

Quereneuf, instrument pour trouver en mer la variation de l'aiguille aimantée. Machin. approuv. par l'Ac. de Par. 7. p. 1. Mém. de Paris 1734. p. 105.

Radouay, remarques sur la navigation. 1727.

Godin, méthode d'observer la variation de l'aiguille aimanté en mer. Mém. de Par. 1734. p. 590.

Bouguer, de la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole. Pièc. de Prix 2. mém. 6.

Condamine, nouvelle manière d'observer en mer la déclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Par. 1733. p. 446., 1734. p. 597.

Middleton, the use of a new azimuth compass for finding the variation of the compass or magnetic needle at sea. Ph. Tr. 1738. p. 395.

Aufstellung der Magnetnadel.

Lana, Acta Erudit. 1686. p. 560. (Aufhängung an Seidenfäden.)

Ingenhouss, on some new methods of suspending magnetical needles. Ph. Tr. 1779. p. 537.

Coulomb, recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées, de les suspendre, de s'assurer qu'elles sont dans le veritable méridien magnétique, enfin de rendre raison de leur variations diurnes régulières. Mém. prés. 9. p. 165.

van Swinden, recherches sur les aiguilles aimantées et sur leurs variations singulières. ib. 8. p. 1.

Kotelnikow, de commoda acus declinatoriae suspensione. Nov. Com. Acad. Petr. 8. p. 304.

Declinatorium.

de la Hire, de la construction des boussoles dont on se sert pour observer la déclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Paris 1716. p. 7.

le Monnier, construction de la boussole, dont on a commencé à se servir en Aout. 1777. Mém. de Par. 1778. p. 66.

Stegmann, Beschreibung eines neuen Boussol-Instruments. Besch. d. Berl. Nat. Freunde. 4. p. 633.

Aepinus, descriptio acuum magneticarum noviter inventarum. Act. Acad. Mogunt. 2. p. 255.

Wilcke. Beschreibung eines neuen Abweichungs-Compasses, womit die Abweichung der Magnetnadel von Norden ohne Mittagslinie zu finden ist. Schwed. Abh. 1763. p. 154.

Zeiher, acus novae declinatoriae descriptio. Nov. Com. Acad. Petr. 7. p. 309.

Rumouski, methodus exactior declinationem acus magneticae observandi. Act. Acad. Petr. 1781. p. 191.

Brander, Beschreibung eines magnetischen Declinatorii und Inclinatorii. Augsb. 1779. 8.

Cassini, description d'une nouvelle boussole, propre à déterminer avec la plus grande précision la direction et la déclinaison absolue de l'aiguille aimantée. Mém. de l'Inst. V. p. 145.

Bidone, Mém. de Turin 1811. p. 141. Gilb. Ann. 64. p. 375.

Beaufoy, variation compass. Barlow Magnetism Encycl. Metrop. 1. p. 766. pl. 5.

Dollond, variation transit. Brewster treatise on magn. p. 334.

Poggendorff, ein Vorschlag zum Messen der magnetischen Abweichung. Pogg. Ann. 7. p. 121.

v. Riese, Bestimmung der Declination der Magnetnadel vermittelst eines Spiegels. Pogg. Ann. 9. p. 67.

Bessel, über den allgemeinen Gebrauch des Passageninstruments. Schumach. astron. Nachr. 6. p. 221.

Gauss, über die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der absoluten Declination. Res. des magn. Ver. 1841. p. 1.

Weber, über die Reduction der Magnetometer Beobachtungen auf absolute Declination. ib. 1837. p. 104.

Declination magnetometer. Report of the Commit. of physics including meteorology. London 1840. p. 30.

Simonof, über eine neue Methode zur Bestimmung der absoluten Declination. Res. d. magn. Ver. 1841. p. 62.

Lamont, magnetischer Theodolit. Ann. für Meteorol. und Erdmagnetismus 1842. 2. p. 179.

Für tägliche Variation.

Coulomb, description d'une boussole, dont l'aiguille est suspendu par un fil de soie. Mém. de Par. 1785. p. 560.

Prony, Beschreibung uud Gebrauch eines Instruments, womit sich die tägliche Variation und die Declination der Magnetnadel mit grossser Genauigkeit messen lassen. Journ. de Ph. 44. p. 474. Gilb. Ann. 26. p. 275.

Troughton, magnetisches Teleskop. Nichols. Journ. 1806. p. 179. Gilb. Ann. 24. p. 114.

Gambey, Pouillet élémens de physique I. pl. 11. fig. 266.

Dollond, diurnal variation instrument. Brewster treatise on magn. p. 335..

Vergrösserungsmethoden derselben.

Biot, sur les diverses amplitudes d'excursion, que les variations diurnes peuvent acquerir, quand on les observe dans un système de corps aimantés réagissant les uns sur les autres. Ann. de Ch. et de Ph. 24. p. 140.

Barlow, observations and experiments on the daily variation of the horizontal and dipping needle under a reduced directive power. Ph. Tr. 1823. p. 326.

Christie, on the diurnal deviation of the horizontal needle, when under the inflnence of magnets. Ph. Tr. 1823. p. 342.

Moser, über eine Methode die Variationen in der Richtung der tellurisch-magnetischen Kraft zu messen, und über einige Anwendungen derselben. Pogg. Ann. 20. p. 431.

Apparate zur Nachweisnng des Magnetismus schwach magnetischer Substanzen.

Brugmans, über die Verwandschaft des Magn. (Schwimmen auf Quecksilber oder Wasser.)

Bennet, a new suspension of the magnetic needle, intended for the discovery of minute quantities of magnetic attraction. Ph. Tr. 1792. p. 81.

Hauy, Traité de minéralogie. u. Gilb. Ann. 63. p. 236.

Coulomb, Journal de phys. 54. p. 240.

Lebaillif, bulletin universel. 8. p. 87. (Sideroscop.)

Apparate zur Neutralisation des Erdmagnetismus.

Doppelter Magnetismus v. Hauy, Traité de minéralogie. 1. p. 211. Gilb. Ann. 63. p. 104.

Astatische Bussole v. Ampère, Gilb. Ann. 70. p. 243.

Doppelnadel, astatische, v. Ampère und Nobili, siehe Galvanometer.

Localattractionen und Compensation derselben.

Barlow, Methode die lokale Variation der Bussole zu corrigiren. Schweigger Journ. 42. p. 18. Gilb. Ann. 73. p. 1.

Poisson, mémoire sur les déviations de la boussole produites par le fer des vaisseaux. Ann. de Ch. et de Ph. 69. p. 5.

Airy, account of experiments on iron built ships, instituted for

the purpose of discovering a correction for the deviation of the compass produced by the iron of the ship. Ph. Tr. 1839. p. 167.

Sabine, on irregularities in the direction of the compass needles, caused by the attraction of the iron in ships. Ph. Tr. 1819. p. 112.

Barlow, on the errors of the course of vessels occasioned by local attraction. Ph. Tr. 1831. p. 215.

Barlow, on magnetic attractions. London 1823.

Horner, Art. Ablenkung d. n. Gehl. Wörterb.

Inclinatorium.

Hartmann, entdeckt die Neigung 1543. Repertorium II. p. 129.

Normann, the new attractive; containing a short discourse of the magnet or loadstone and among other his virtues, of a new discovered secret and subtil property, concerning the declination of the needle touched therewith under the plaine of the horizon. London 1596. 4. (erstes Inclinatorium 1576.)

Buache, construction d'une nouvelle boussole, dont l'aiguille donne par une seule et même opération, l'inclinaison et la declinaison de l'aimant. Mém. de Paris 1732. p. 377.

Daniell Bernoulli, mémoire sur la manière de construire les boussoles d'inclinaison pour faire avec le plus de précision qu'il est possible les observations de l'aiguille aimantée, tant sur mer que sur terre. Pièces de Prix de l'Acad. de Par. 5. Mém. 8.

Nairne, experiments on two dipping needles, which dipping needles were made agreeable to a plan of Mr. Mitchell and executed for the board of longitude. Ph. Tr. 1772. p. 476.

Lorimer, description of a new dipping needle. Ph. Tr. 1775. p. 79.

Kraft, annotationes circa constructionem et usum acus inclinatoriae. Act. Acad. Petrop. 1778. 2. p. 170.

Lous, beskrifning over et nyt opfunden Söe-inklinationscompass, tillige med nogle anmärkninger over dette slagsinstrumenter. Skrift det Kiöbenh. Selsk. 12. p. 93.

Bugge, beskrivelse over et nyt inclinations-compass. ib. Nye Saml. 4. p. 472.

Mémoire sur les nouvelles aiguilles d'inclinaison faites à Basle par Dietrich. Act. Helv. 3. p. 233.

v. Hahn, Bemerkungen über die Neigungsnadel. Berl. nat. Fr. 10. p. 355.

Wilcke, von der Neigung der Magnetnadel nebst Beschreibung zweier Neigungscompasse. 1772. p. 285.

Borda's, v. Lenoir ausgeführt Gilb. Ann. 4. p. 449. Anmerk. u. allg. geogr. Ephemer. 1799. p. 146.

Gambey, in Lloyd, Magnetical obsersvatory of Dublin. p. 23.

Robinson, Res. des magn. Ver. 1841. p. 10.

Beobachtungsmethoden der Neigung.

Euler, de observatione inclinationis magneticae dissertatio Pièces de prix de l'Acad. de Par. 5. mém. 9. p. 63.

Euler 2, théorie de l'inclinaison de l'aiguille magnétique, confirmée par des expériences. Mém. de Berl. 1755. p. 117.

la Caille, observations sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Par. 1754. p. 111.

le Valois, observations sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Paris 1786. p. 43.

Gauss, Beobachtungen der magnetischen Inclination zu Göttingen. Res. d. magn. Ver. 1841. p. 10.

Coulomb, nouvelle méthode de déterminer l'inclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de l'Inst. 1803. IV. p. 165.

Tobias Mayer, de usu accuratiori acus inclinatoriae magneticae. Comm. Soc. Gott. 3. p. 3.

Sabine, an account of experiments to determine the amount of the dip of the magnetic needle in London in August 1821 with remarks on the instruments which are usually employed in such determinations. Ph. Tr. 1822. p. 1.

Schmidt, über Mayers Methode den magnetischen Neigungscompass zu gebrauchen. Gilb. Ann. 63. p. 1.

Sartorius u. Waltershausen, das Oscillationsinclinatorium. Res. de magn. Ver. 1838. p. 58.

Weber, das Inductionsinclinatorium. Res. d. Gott. Ver. 1837. p. 81.

Lloyd, induction inclinometer. Magnetical Observatory of Dublin p. 43.

Intensitätsapparate.

Coulomb, détermination théorique et expérimentale des forces, qui ramènent différentes aiguilles aimantées à saturation à leur méridien magnétique. Mém. de l'Inst. 3. p. 176.

Hansteen, Beobachtungen über die Intensität des Magnetismus im nördlichen Europa. Pogg. Ann. 3. p. 225.

Gambey, Pouillet Élémens de physique. Tom. I. pl. 11. fig. 277. 278. 3 ed.

Poisson, solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre (mesure de l'intensité de l'action magnétique de la terre, comparable pour tous les temps Connaissance des temps 1828. p. 322.

Moser, über die Messung der Intensität des tellurischen Magnetes. Pogg. Ann. 18. p. 226., 19. p. 161.

Christie, on improvements in the instruments and methods employed in determining the direction and intensity of the terrestrial magnetic force. Ph. Tr. 1833. p. 343.

Gauss, intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gott. 1833. 4. (Magnetometer.)

Gauss, Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel. Res. des magn. Ver. 1837. p. 58.

Weber. Bemerkungen über die Wahl der Magnetnadeln zu Magnetometern. ib. 1841. p. 79.

Gauss, über ein neues zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderung in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument. Res. des magn. Ver. 1837. p. 1. (Bifilar Magnetometer.)

Gauss, Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers. ib. 1837. p. 20.

Gauss, zur Bestimmung der Constanten des Bifilarmagnetometers. ib. 1840. p. 1.

Goldschmidt, über die Bestimmung der absoluten Intensität. ib. 1840. p. 122.

Weber, Beschreibung eines kleinen Apparats zur Messung des

Erdmagnetismus nach absolutem Maass für Reisende. Res. 1836. p. 63.

Weber, das transportable Magnetometer. Res. 1838. p. 68.

Lamont, über Bestimmung der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maass. 4.

Horizontal force magnetometer. Report. of the Comm. of Physics incled. meteorol. Lond. 1840. p. 23.

Vertical force magnetometer. ib. p. 31.

Lloyd, on the determination of the intensity of the earth's magnetic force in absolute measure.

Observatorien für den Magnetismus der Erde.

Weber, Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente. Res. 1836. p. 13.

Kreil, die magnetischen Apparate und ihre Aufstellung auf der K. K. Sternwarte zu Prag. Res. 1839. p. 91.

Lloyd, account of the magnetical observatory at Dublin and of the instruments and methods of observation employed there. Dublin 1842. 4. 54 S.

Lamont, über das magnetische Observatorium der K. Sternwarte bei München. München 1842. 4.

Darstellungen und Theorien des Erdmagnetismus.

Halley. theory of the variation of the magnetical compass. Ph. Tr. 1683. p. 208.

Halley, account of the cause of the change of the variation of the magnetical needle, with an hypothesis of the structure of the internal parts of the earth. Ph. Tr. 1692. p. 563.

Whiston, the longitude aud latitude found by the inclinatory or dipping needle, wherin the laws of magnetism are also discovered. London 1721. 8.

Mountain and Dodson, an account of the methods used to describe lines on Dr. Halley's chart of the terraqueous globe, shewing the variation of the magnetic needle about the year 1756 in all the known seas. London 1758. 4.

Wilcke, Versuch einer magnetischen Neigungscharte. Schwed. Abh. 1768. p. 209.

Zegollström, theoria declinationis magneticae. Upsala 2755.

le Monnier, remarques sur la carte Suedoise de l'inclinaison de l'aimant publiée à Stockholm. Mém. de Paris 1772. p. 461.

Bellin, carte des variations des la boussole et des vents généraux, que l'on trouve dans les mers les plus frequentées. Paris 1765.

Funk, die nördliche und südliche Erdoberfläche auf die Ebene des Aequators projicirt. Leipzig 1781. (Neigungs- und Abweichungslinien.)

le Monnier, loix du magnetisme pour indiquer les courbes magnétiques comparées aux observations dans les différentes parties du globe. Paris 1778. 8. 2 vol.

Dunn, magnetic atlas. London 1776.

Churchmann, the magnetic atlas or variation charts of the whole terraqueons globe; comprising a system of the variation and dip of the needle. London 1794.

Lorimer, a concise essay on magnetism, with an account of the declination and inclination of the magnetic needle. London 1795. 4.

Burja, rapport sur un ouvrage et une carte de Churchmann concernant la déclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Berl. 1790. h. p. 11.

Euler, recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée. Mém. de Berl. 1757. p. 175.

Euler, corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison aimantée. ib. 1766. p. 213.

Tob. Mayer, Gött. Gel. Anz. 1760. p. 633., 1762. p. 377.

Löwenörn, nogle tanker over magneten, tit at kunne forklare saavel magnet naalens variation som inclination. Dansk. Vid. Selsk. Sk. 2. p. 285.

Steinhäuser, de magnetismo telluris commentationes mathematico physicae. Wittenb. 1806.

Mollweide, Theorie der Abweichung und Neigung der Magnetnadel. Gilb. Ann. 29. p. 1. 251., 70. p. 26.

v. Humboldt und Biot, über die Variationen des Magnetismus der Erde in verschiedenen Breiten. Journ. de phys. 49. p. 429., Gilb. Ann. 20. p. 257.

Biot, Bericht über Morlet's Untersuchungen über den magnetischen Aequator und den Magnetismus der Erde. Gilb. Ann. 70. p. 1.

Quinet, théorie de l'aimant appliquée aux déclinaisons et inclinaisons de l'aiguille de boussole, et démontrée par la trigonométrie sphérique. Paris 1809. 4.

Quinet, exposé des variations magnétiques et atmosphériques. Paris 1826. 8.

Hansteen, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde. Christiania 1819. 4. nebst einem Atlas und Gilb. Ann. 65. p. 313., 70. p. 36. 110., 71. p. 273.

Hansteen, zur Geschichte und Vertheidigung seiner Untersuchungen über den Magnetismus der Erde und kritische Bemerkungen über die hierher gehörigen Arbeiten von Biot und Morlet. Gilb. Ann. 75. p. 145.

Hansteen, Versuch einer magnetischen Neigungscharte nach den Beobachtungen auf der letzten englischen Nordpolexpedition unter Cap. Ross und Parry. Pogg. Ann. 4. p. 277.

Hansteen, Indynaminische Linien für die ganze magnetische Kraft. Pogg. Ann. 9. p. 49. 229., 28. p. 473. 578.

Barlow, on the present situation of the magnetic lines of equal variation and their changes on the terrestrial surface. Ph. Tr. 1833. p. 667.

Ross, on the position of the north magnetic pole. ib. 1834. p. 47.

Hansteen, einige von verschiedenen Beobachtern im nördlichen Europa angestellte magnetische Beobachtungen über Neigung und Intensität mit 3 Steindrucktafeln. Schumach. astron. Nach. 7. p. 17.

Quetelet, recherches sur l'intensité magnétique en Suisse et en Italie. Mém. de l'Acad. de Brux. VI. 1831.

Quetelet, second mémoire sur le magnétisme terrestre en Italie. ib. XIII. 1840.

Duperrey, über die gegenwärtige Lage des magnetischen Aequators. Pogg. Ann. 21. p. 151. Charte.

Horner, Inclinationscharte (neues Gehl. Wörterbuch B. 6.).

Moser, über die Erscheinungen des Magnetismus der Erde. Königsberger naturwissensch. Vorträge. 1834. p. 217.

Moser, Methode, die Lage und Kraft des veränderlichen Pols kennen zu lernen. Pogg. Ann. 28. p. 49. 273.

Moser, über den Magnetismus der Erde. Pogg. Ann. 34. p. 63. 271. Schum. astr. Nachr. 1834. No. 265. u. Rep. II. p. 219.

Erman 2, über die Gestalt der isogonischen, isoklinischen und isodynamischen Linien im Jahr 1829 und die Anwendbarkeit

dieser eingebildeten Curven auf die Theorie des Erdmagnetismus. Pogg. Ann. 21. p. 119.

Davies, geometrical investigations concerning the phenomena of terrestrial magnetism. Ph. Tr. 1835. p. 221., 1836. p. 75.

Sabine, report on the variation of magnetic intensity. Report 7. of the meeting of the British Association. (Charte für die ganze Intensität.)

Neumann, über eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phaenomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind. Schumach. astron. Nachr. 15. p. 313.

Gauss, Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Res. d. magn. Ver. 1838. p. 1. 146.

Gauss u. Weber, Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen. Leipzig 1840. 4.

Goldschmidt, Vergleichung magnetischer Beobachtungen mit den Elementen der Theorie. Res. de magn. Ver. 1840. p. 158. 1841. p. 109.

Report of the committee of physics including meteorology on the objects of scientific inquiry in those sciences. London 1840. 8. 120 S. 4 Charten.

Sabine and Lloyd, report on the magnetic isoclinal and isodynamic lines in the british islands. London 1839. 8. 196 S. 3 Chart.

Sabine, contributions to terrestrial magnetism. Ph. Tr. 1840. p. 129., 1841. p. 11., 1842. p. 9.

Bessel, über den Magnetismus der Erde. Schumach. astron. Jahrb. 1843. p. 117.

Morlet, recherches sur les lois du magnétisme terrestre. Compt. rend. 1836. 2. p. 148.

Ursache des Magnetismus der Erde.

Silberschlag, systema inclinationis et declinationis utriusque acus magneticae. Mém. de Berl. 1786. p. 87.

Buffon, histoire naturelle des minéraux. Paris 1788. 5 vol.

Ampère, recueil d'observations électrodynamiques. Paris 1822.

Seebeck, über die magnetische Polarisation der Metalle durch Temperaturdifferenz. Abh. d. Berl. Ak. 1822.

Barlow, on the probable electric origin of the phenomena of terrestrial magnetism. Ph. Tr. 1831. p. 99.

Metcalf, a new theory of terrestrial magnetism. New-York 1833. 8.

Clarke, a treatise on the magnetism of the needle, the reason of its being north and south, its dipping and variation. London 1818. 8. Southwark 1825. 8.

James Barlow, a new theory accounting for the dip of the magnetic needle being an analysis of terrestrial magnetism. New-York 1835. 8.

Sammlungen von Beobachtungen.

(Ausser den bereits angeführten allgemeinen Werken.)

Mountain and Dodson, on the variation of the magnetic needle with a set of tables annexed which exhibit the results of upwards of fifty thousand observations. Ph. Tr. 1757. p. 329.

Buffon, histoire naturelle des minéraux. 1788. vol. 5.

Vancouver, Abweichungen und Neigungen. Bearb. v. Gilbert. Ann. 30. p. 72—90.

d'Entrecasteaux u. Labillardière, Beob. bearb. v. Gilbert. Ann. 30. p. 161—219.

La Peyrouse, Beob. bearb. v. Gilbert. Ann. 32. p. 77—123.

Cook, Beob. bearb. v. Gilbert. Ann. 35. p. 206.

Freycinet, Beob. bearb. v. Gilbert. Ann. 70. p. 78.

v. Humboldt, Beobachtung der Intensität magnetischer Kräfte und der magnetischen Neigung angestellt in den Jahren 1798 bis 1803 von 48° 50′ N. B. bei 12° S. B. und 3° 2′ O. L. bis 106° 22′ W. L. in Frankreich, Spanien, den canarischen Inseln, dem atlantischen Ocean und der Südsee. Pogg. Ann. 15. p. 336.

v. Humboldt u. Gay Lussac, über die Stärke und über die Neigung der magnetischen Kräfte in Frankreich, der Schweiz, Italien und Deutschland. Mém. d'Arcueil 1. p. 1. Gilb. Ann. 28. p. 257.

v. Humboldt, Inclinationsbeobachtungen in Russland. Pogg. Ann. 18. p. 355.

Dupperey, voyage de la Coquille. Physique. Paris 1826.

Sabine, an account of experiments to deternine the figure of the earth by means of the pendulum. London 1825. Pogg. Ann. 6. p. 88.

Hansteen, Tafel über magnetische Inclination und Intensität. Pogg. Ann. 14. p. 376.

A. Erman, Reise um die Erde und Pogg. Ann. 16. p. 139., 17. p. 328., 21. p. 119., 23. p. 485., 39. p. 115., 37. p. 522.

Forbes, account of experiments on terrestrial magnetism made in different parts of Europe. Edinb. Trans. vol. 14. p. 1. u. 15. p. 27.

Bache and Courtenay, on the relative horizontal intensities of terrestrial magnetism at several places in the united states. Americ. Trans. V. p. 427. on the magnetic dip. ib. p. 209.

Rudberg, Intensitätsbeobachtungen. Pogg. Ann. 27. p. 5.

v. Waltershausen und Listing, Resultate aus in Italien angestellten Intensitätsmessungen. Res. des magn. Ver. 1840. p. 157.

Billingshausen, Abweichungen der Magnetnadel beobachtet in den Jahren 1819—1821. ib. 1839. p. 117.

Gleichzeitige Beobachtungssysteme besonders für tägliche Veränderungen.

Correspondirende Beobachtungen über die regelmässigen stündlichen Veränderungen und über die Perturbationen der magnetischen Abweichung im mittlern und östlichen Europa gesammelt und verglichen von Dove mit einem Vorwort von A. v. Humboldt. Pogg. Ann. 19. p. 357.

Kupfer, recueil d'observations magnétiques faites à St. Pétersbourg et sur d'autres points de l'empire de Russie. Pétersbourg 1837. 4. 717 S.

Gauss und Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in den Jahren 1836—1841. 8. Leipzig. Jährlich.

Annuaire magnétique et météorologique du corps des ingenieurs des mines de Russie ou recueil d'observations magnétiques et météorologiques faites dans l'étendue de l'empire de Russie et publiées par ordre de l'empereur Nicolas I. et sous les auspices de Mr. le Comte Cancrine par Kupfer. gr. 4. 5 vol. seit 1836.

Lamont, Annalen der Meteorologie und des Erdmagnetismus. München 1842.

Quetelet, résumé des observations magnétiques et météorologiques faites à des époques déterminées. Mém. de Brux. XVI.

Tägliche Veränderungen der Abweichung.

Graham, observations made of the variation of the horizontal needle at London, in the latter part of the year 1722. Ph. Tr. 33. p. 96.

Celsius, Bemerkungen über der Magnetnadel stündliche Veränderungen in ihrer Abweichung. Schw. Abh. 1740. p. 45.

Hiorter, von der Magnetnadel verschiedenen Bewegungen. ib. 1747. p. 27.

Wilcke, von den jährlichen und täglichen Bewegungen der Magnetnadel. ib. 1777. p. 259.

Cassini, de l'influence de l'équinoxe du printems et du solstice d'été sur la déclinaison et les variations de l'aiguille aimantée. 1791.

Macdonald, observations of the diurnal variation of the magnetic needle at Sumatra and St. Helena. Ph. Tr. 1796. p. 340., 1798. p. 397.

van Swinden, dissertation sur les mouvemens irréguliers de l'aiguille aimantée. 254 S. Recueil de mém. sur l'analogie de l'électr. et du magn. Tom. III. 1784.

Gilpin, observations on the variation and on the dip of the magnetic needle made at the apartments of the Royal Society between the years 1786 and 1805 incl. Ph. Tr. 1806. p. 385. Gilb. An. 29. p. 403.

Hällström, dissertatio de variationibus declinationis magneticae diurnis et animadversiones circa hypotheses ad explicandas variationes diurnas excogitatas. Abo 1803. Gilb. Ann. 29. p. 282.

Schübler, Beobachtungen über die täglichen periodischen Veränderungen der Abweichung der Magnetnadel. Schweigg. Journ. 28. p. 350.

Dove, über die täglichen Veränderungen der magnetischen Abweichung in Freiberg. Pogg. Ann. 31. p. 97.

Kaemtz, Lehrbuch der Meteorologie 3. p. 401.

Quetelet, sur l'emploi de la boussole dans les mines. Bruxelles 1843. 8.

Gauss, Auszug aus dreijährigen täglichen Beobachtungen der

magnetischen Declination zu Göttingen. Res. des magn. Ver. 1836. p. 50.

Goldschmidt, Auszug aus sechsjährigen täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Göttingen. ib. 1839. p. 102., im Jahr 1840. ib. 1840. p. 119., im Jahr 1841. ib. 1841. p. 107.

Kreil, magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. Jährlich seit Aug. 1839. 4. (Abweichung und Intensität.)

Kreil, Primo supplemento alle effemeridi di Milano und Pogg. Ann. 43. p. 302., 46. p. 443. Schum. astr. Nachr. 1837. No. 328.

Tägliche Veränderungen der Intensität.

Hansteen, Auffindung einer täglichen und einer monatlichen Variation in der Stärke des Erdmagnetismus. Gilb. Ann. 68. p. 265.

Riess, de telluris magnetismi mutationibus et diurnis et menstruis. Berol. 1831. 4.

Foster, a comparison of the changes of the magnetic intensity throughout the day in the dipping and horizontal needles at Treurenburgh Bay in Spitzbergen. Ph. Tr. 1828. p. 303.

Kupfer, recherches snr les variations de la durée moyenne des oscillations horizontales de l'aiguille aimantée. Ann. de ch. et de ph. 35. p. 225.

Reich, Beobachtungen über die tägliche Veränderung der Intensität des horizontalen Theils der magnetischen Kraft. Pogg. Ann. 18. p. 57.

Barlow, über die magnetischen Beobachtungen auf Parrys dritter Reise in Port Bowen. Schweigg. Journ. 50. p. 446. aus Jameson Edinb. new phil. Journ. 1827. p. 347.

Dove, über gleichzeitige Störungen der magnetischen Kraft und Abweichung. Pogg. Ann. 20. p. 545.

Einfluss des Nordlichts und Störungen überhaupt.

(Ausser den bereits angeführten Beobachtungen der täglichen Veränderungen.)

Hansteen, Magnetismus der Erde. Achtes Hauptstück.

Canton, an attempt to account for the regular diurnal variation

of the horizontal needle and also for its irregular variation at the time of an Aurora Borealis. Ph. Tr. 1759. p. 398.

Arago, sur les influences magnétiques exercées par les aurores boreales et sur la prétendue découverte, que Mr. Brewster annonce avoir faite sur ce sujet. Ann. de Ch. et de Ph. 39. p. 369.

Brewster, gegen den Einfluss der Nordlichter auf die Magnetnadel. Edinb. Journ. of Sc. 16. p. 189. Baumg. Journ. 4. p. 343.

Fox, on the variable intensity of terrestrial magnetism and the influence of the Aurora Borealis upon it. Ph. Tr. 1831. p. 199.

Farquharson, experiments on the influence of the Aurora Borealis on the magnetic needle. Ph. Tr. 1830. p. 97.

Kupfer, Notiz über ein in Petersburg in der Nacht vom 5ten auf den 6ten Mai 1830 beobachtetes Nordlicht. Pogg. Ann. 18. p. 611.

Dove, über das Nordlicht vom 19. und 20. December 1829. Pogg. Ann. 20. p. 333.

Beobachtungen über das Nordlicht vom 7. Januar 1831 zusammengestellt von Poggendorff Ann. 22. p. 434.

Rudberg, über den Einfluss des Nordlichts auf Inclination. Pogg. Ann. 39. p. 109.

Kreil, Beobachtungen der magnetischen Abweichung, Neigung und horizontalen Intensität zu Mailand im Jahr 1836. Pogg. Ann. 41. p. 527.

Bache, note of the effect upon the magnetic needle of the Aurora Borealis visible at Philadelphia on the 17. May 1833. Frankl. Inst. July 1835.

Bache, observations ou the disturbance in the direction of the horizontal needle during the Aurora of July 10 th. 1833. ib. 1834. Jan.

Sabine, observations made at the magnetic observatories of Toronto in Canada, Trevandrum in the East Indies and St. Helena. London 1841. 8.

Sabine, Observations on days of unusual magnetic disturbance made at the British Colonial magnetic observatories. London 1843. 4. 107 S.

Photomagnetismus?

Morechini, Magnetismus durch die violetten Strahlen des Prisma erregt. Schweigger Journ. 6. p. 327.

M. Sommerville, on the magnetizing power of the more refrangible solar rays. Ph. Tr. 1826. p. 132.

Ridolfi, nouvelles expériences tendant à démontrer qu'il existe une force magnétisante dans l'extrémité violette du spectre solaire. Ann. de Ch. et de Ph. 3. p. 323.

Christie, on magnetic influence in the solar rays. Ph. Tr. 1826. p. 219.

Baumgartner, Untersuchungen über den Magnetismus des Eisens durch das Licht nebst neuen Versuchen über denselben Gegenstand. Baumg. Journ. 1. p. 263.

Riess und Moser, über die magnetisirende Eigenschaft des Sonnenlichtes. Pogg. Ann. 16. p. 563.

Nachtrag.

Wheatstone, description of the electromagnetic clock. Lond. and Ed. Ph. Mag. 18. p. 139.

Casselmann, über die galvanische Kohlenzinkkette und einige mit derselben angestellte Beobachtungen. Marburg 1843. 8. 76 S.

Dujardin, description d'une nouvelln machine électrique à plateau. Ann. de Ch. et Ph. n. Ser. 9. p. 111.

Dujardin, nouveau commutateur voltaique. ib. p. 110.

Augustin, Versuch einer vollständigen systematischen Geschichte der galvanischen Elektricität und ihrer medicinischen Anwendung. Berlin 1803. 284 S.

Hartmann, Encyclopädie der elektrischen Wissenschaften. Bremen 1784. 4. 256 S.

Uebersicht der Literatur.

I. Elektromagnetismus.

II. Inductionserscheinungen.

III. Galvanismus.

Magnetismus.

Magnetische Apparate.

Schlussbemerkung.

Da in keiner physikalischen Disciplin so häufig wie im Gebiete des Magnetismus nnd der Elektricität frühere Arbeiten durch spätere berichtigt und widerlegt worden sind, eben so häufig aber auch dasselbe Resultat von vielen Seiten gleichzeitig erhalten, oft aber auch längst Bekanntes als neu wiederholt veröffentlicht wurde, so musste aus dem überreichen Material eine gewisse Auswahl getroffen werden. Dies war besonders in Beziehung auf die ältern Arbeiten durchaus nothwendig. Ebenso sind einzelne den Erdmagnetismus betreffende Beobachtungen nicht angeführt, da sie in den allgemeineren Werken leicht anfgefunden werden können. Da aber die elektromagnetischen Wirkungen der Ströme in neuerer Zeit vorzugsweise als Maasbestimmungen für alle Elektricitätsquellen angewendet worden sind, so wird es gerechtfertigt erscheinen, dass in der Anordnung des Inhalts mit dem Elektromagnetismus begonnen wurde, an welchen sich die Induktionserscheinungen wiederum am natürlichsten anschliessen, welche zugleich den elektrischen Strom in seiner einfachsten Form darstellen. Die komplicirteren Formen desselben (Galvanismus, thierische Elektricität nnd Thermoelektricität) folgen dann, zuletzt die momentanen Ströme der Reibungs- und atmosphärischen Elektricität.

Dove.

Sechszehnter Abschnitt.

Ueber das Auge,

von

Ludwig Moser.

Ueber den Weg der Lichtstrahlen im Auge.

Dieser Gegenstand bildet das Fundament der Betrachtung des Auges als eines optischen Apparats, und es ist daher zweckmässig, ihm einen eigenen Abschnitt zu widmen; man wird finden, dass hierdurch einige wesentliche Aufgaben über dieses Organ zur Erledigung gelangen. Das Auge lässt sich mit einem System sphärisch gekrümmter Körper vergleichen, in welchem jedoch die vorkommenden Dicken nicht vernachlässigt werden können; über den Weg der Lichtstrahlen durch ein solches System sind in neuerer Zeit zwei Abhandlungen von Gauss und Bessel erschienen *), die sich auf den vorliegenden Fall anwenden lassen. Wir folgen hier vorzugsweise der Untersuchung des letztern Gelehrten.

Es sei ein System von $i + 1$ Linsen, von beliebigen Krümmungshalbmessern und aus durchsichtigen Substanzen von beliebiger Brechbarkeit bestehend, deren Axen jedoch zusammenfallen, d. h. deren Mittelpunkte sämmtlich auf einer und derselben Geraden liegen. Es wird ein Strahl vorausgesetzt, so gerichtet, dass eine Ebene durch ihn und die Axe gelegt werden könne. Die

---

*) C. F. Gauss: Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841. — Bessel: Ueber die Grundformeln der Dioptrik, in Schumacher: Astronomische Nachrichten. Band 18. No. 415. Februar 1841.

☞ Durch einen vom Corrector übersehenen Irrthum des Setzers ist von hier ab statt 289 sqq. 337 sqq. paginirt worden, da sich der Setzer nach der Signatur gerichtet und übersehen hat, dass unter den 21 signirten Bogen sechs Halbbogen sich befinden. Es ist demnach hier **kein Defect** vorhanden.

Lage des Strahls ist dann bestimmt, wenn wir angeben, dass er die Axe unter dem Winkel w und zwar in einer Entfernung a, von der ersten der brechenden Flächen gerechnet, treffe. Was das System von Linsen betrifft, welche dieser Strahl successive durchdringt, so müssen wir die Radien derselben, ihre Dicken, ihre Entfernungen und endlich die Brechbarkeit ihrer Substanz bezeichnen.

Es seien $r, r_1, r_2 \ldots r_i$ die Radien der vorderen Flächen,
$\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_i$ – – – hinteren –
$d, d_1, d_2 \ldots d_i$ – Dicken der Linsen, in der Axe gemessen,
$e, e_1, e_2 \ldots e_{i-1}$ – Entfernung der Linsen zwischen den einander zugewandten Flächen, und zwar ebenfalls in der Axe gemessen.

Endlich seien $n\, n_1\, n_2 \ldots n_i$ – Brechungsverhältnisse, dasjenige des umgebenden Mediums $= 1$ gesetzt.

Ueber die Zeichen der Radien r, ϱ u. s. w. ist zu bemerken, dass sie positiv genommen werden sollen, wenn die vorderen Flächen der betreffenden Linse convex sind, die hinteren Flächen aber concav. So wäre also in dem Falle einer biconvexen Linse r positiv, ϱ negativ zu nehmen; bei einer biconcaven r negativ, ϱ positiv u. s. w.

Wir haben jetzt den Weg des Lichtstrahls, welcher mit der Axe den Winkel w bildet und diese Axe in der Entfernung a von der Vorderfläche der Linse trifft, im Innern der Substanz zu bestimmen. Zu dem Ende nehme man an, dass dieser Strahl die Vorderfläche an einem Punkt treffe, zwischen welchem und der Axe der Winkel t am Mittelpunkt der Krümmung eingeschlossen ist. Der Strahl wird an diesem Punkt aus seiner Richtung gelenkt, bildet nach der Brechung den Winkel v mit der Axe, und würde dieselbe in einer Entfernung b, von der ersten Linsenfläche gemessen, treffen. a und b, so wie die später anzuführenden Entfernungen werden positiv genommen, wenn die Punkte der Axe, auf welche sie sich beziehen, von den betreffenden Flächen nach Innen zu liegen. So wäre z. B. a positiv, wenn der ursprünglich einfallende Strahl die Axe hinter der ersten Linsenfläche trifft u. s. w.

Mit den angegebenen Bezeichnungen findet man ohne alle Schwierigkeit:

$$r \sin \{t - w\} = (a - r) \sin w$$
$$n \sin \{t - v\} = \sin \{t - w\}$$
$$(b - r) \sin v = r \sin \{t - v\}$$

Wenn nun für die Brechung an der hinteren Fläche $\varrho, \tau, \varphi, \alpha, \beta,$ den bisherigen r, t, w, a, b, entsprechen, so hat man ferner

$$\varrho \sin \{\tau - v\} = (\beta - \varrho) \sin v$$
$$\sin \{\tau - \varphi\} = n \sin \{\tau - v\}$$
$$(\alpha - \varrho) \sin \varphi = \varrho \sin \{\tau - \varphi\}$$

Endlich ist noch $\beta = b - d$

Diese Gleichungen bleiben für die folgenden Linsen dieselben, wenn man die Typen anwendet und zugleich bemerkt, dass mit Bezug auf die zweite Linse $a_1 = \alpha - e$
und $w_1 = \varphi$ ist.

Wenn sämmtliche, hier vorkommende Winkel unendlich klein sind, so erhält man durch Substituirung der Bogen für die Sinus

für die erste Linse: $\frac{n}{b} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r}$

$$\frac{n}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{n-1}{\varrho}$$
$$a w = r t = b v$$
$$\alpha \varphi = \varrho \tau = \beta v$$
$$\beta = b - d$$

für die zweite Linse: $\frac{n_1}{b_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{n_1 - 1}{r_1}$

$$\frac{n_1}{\beta_1} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{n_1 - 1}{\varrho_1}$$
$$a_1 w_1 = r_1 t_1 = b_1 v_1$$
$$\alpha_1 \varphi_1 = \varrho_1 \tau_1 = \beta_1 v_1$$
$$\beta_1 = b_1 - d_1$$

wo, wie schon bemerkt worden ist $a_1 = \alpha - e$ und $w_1 = \varphi$ ist.

Hieraus nun findet sich $\alpha_1 = \cfrac{1}{-\cfrac{(n_1 - 1)}{\varrho_1} + \cfrac{n_1}{\beta_1}}$

oder, da $\beta_1 = b_1 - d$

$$\alpha_1 = \cfrac{1}{\cfrac{-(n_1 - 1)}{\varrho_1} + \cfrac{1}{-\cfrac{d_1}{n_1} + \cfrac{b_1}{n_1}}}$$

Für $\frac{b_1}{n_1}$ findet man $\cfrac{1}{\frac{(n_1-1)}{r_1}+\frac{1}{a_1}}$

oder $\cfrac{1}{\frac{(n_1-1)}{r_1}+\frac{1}{-e+\alpha}}$

Und endlich für α $\cfrac{1}{\frac{-(n-1)}{\varrho}+\cfrac{1}{-\frac{d}{n}+\cfrac{1}{\frac{n-1}{r}+\frac{1}{a}}}}$

Substituirt man diese letzteren Werthe in den Werth von α_1, so erhält man diese Grösse in der Form eines Kettenbruchs, welches die einfachste Form ist, unter der dieselbe dargestellt werden kann. In derselben Form stellen sich, wie man sieht, die Grössen $\frac{n_1}{\beta_1}$, $\frac{b_1}{n_1}$ und $\frac{1}{a_1}$ dar.

Aus dem Voranstehenden ergiebt sich, dass wenn man für die $i+1$ Linsen folgenden Kettenbruch aufstellt:

$$\cfrac{1}{\frac{1-n_i}{\varrho_i}+\cfrac{1}{\frac{-d_i}{n_i}+\cfrac{1}{\frac{n_i-1}{r_i}+\cfrac{1}{-e_{i-1}+\cfrac{1}{\frac{1-n_{i-1}}{\varrho_{i-1}}+\dots\dots \cfrac{1}{\frac{n-1}{r}+\frac{1}{a}}}}}}},$$

so wird der Werth des ganzen Kettenbruchs $=\alpha_i$ sein. Man wird ferner $\frac{n_i}{\beta_i}$, $\frac{b_i}{n_i}$, $\frac{1}{a_i}$ erhalten, wenn man davon das erste, die zwei ersten, die drei ersten Glieder trennt, u. s. w.

Der Kettenbruch besteht aus $4i+4$ Gliedern, nemlich aus $2i+2$ Krümmungshalbmessern, $i+1$ Dicken und i Entfernungen der einzelnen Linsen von einander. Bessel führt daher zur Vereinfachung folgende Bezeichnung ein.

Er setzt für $\frac{1-n_i}{\varrho_i}$: $(4i+3)$

für $\frac{-d_i}{n_i}$: $(4i+2)$

u. s. w.

also für $-e : (4)$

$$\frac{1-n}{\varrho} : (3)$$

$$\frac{-d}{n} : (2)$$

$$\frac{n-1}{r} : (1)$$

Schreibt man für den Werth des ganzen Kettenbruchs $[4i+3, a]$, für denselben mit fortgelassenem ersten Gliede $[4i+2, a]$ u. s. w., so hat man, dem Vorhergehenden zufolge

$$\alpha_i = [4i+3, a], \frac{n_i}{\beta_i} = [4i+2, a], \frac{b_i}{n_i} = [4i+1, a], \frac{1}{a_i}\ [4i, a]$$

und ähnliche Gleichungen für α_{i-1}, $\alpha_{i-2} \ldots \frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}}$ u. s. w.

Wenn ein Kettenbruch gegeben ist

$$\cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots + \cfrac{1}{z}}}}$$

so hat man bekanntlich, um ihn auf einen gewöhnlichen Bruch zu bringen, folgende Grössen zu bilden:

$$p,\ pq+1,\ (pq+1)\,r+p, \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man diese Grössen der Reihe nach durch (p), (p,q), (p,r) u. s. w., dann kann für den Werth des Kettenbruchs geschrieben werden $\frac{(q,z)}{(p,z)}$.

Diesem zufolge ist in unserm Falle $[4i+3, a] = \frac{(4i+2 . a)}{(4i+3 . a)}$, und so erhält man

$$\frac{\alpha_i\, b_i}{a_i\, \beta_i} = \frac{(4i-1, a)}{(4i+3, a)} \ldots\ldots (1)$$

Wenn man die Gleichungen, welche wir oben für einen Lichtstrahl mittheilten, welcher unter der Voraussetzung unendlich kleiner Winkel durch Linsen sich bewegt, betrachtet, und die Winkel w_i, v_i, φ_i auf den anfänglichen Winkel w reduzirt, so erhält man leicht folgende Relationen:

$$w_i = M_i\, w$$

$$v_i = M_i \frac{a_i}{b_i} w$$

$$\varphi_i = M_i \frac{a_i \beta_i}{\alpha_i b_i} w.$$

wo mit M_i der Ausdruck $\frac{a.a_1 \ldots a_{i-1}}{\alpha.\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}} \cdot \frac{\beta.\beta_1 \ldots \beta_{i-1}}{b.b_1 \ldots b_{i-1}}$ bezeichnet worden ist. Mittelst der vorigen Gleichung (1) geht M_i über in $(4i-1,a)$, in so fern man erwägt, dass $\frac{a\beta}{\alpha b} = (3,a)$, $\frac{a_1 \beta_1}{\alpha_1 b_1} = \frac{(7,a)}{(3,a)}$ .... $\frac{a_{i-1} \cdot \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1} \cdot b_{i-1}} = \frac{(4i-1,a)}{(4i-5,a)}$ ist.

Daher erhält man ..... $w_i = (4i-1,a)\, w$ I

Da ferner, dem Obigen zufolge

$\frac{b_i}{a_i} = n_i\, [4i+1,a]\, [4i,a] = n_i \frac{(4i-1,a)}{(4i+1a)}$ ist, so findet man

$$n_i v_i = (4i+1,a)\; w \ldots\; \text{II}$$

$$\varphi_i = (4i+3,a)\; w \ldots\; \text{III}$$

Endlich hat man noch

$$a_i = \frac{(4i,a)}{(4i-1a)} \ldots\ldots\; \text{IV}$$

$$b_i = \frac{(4i,a)}{(4i+1,a)}\, n_i \ldots\; \text{V}$$

$$\beta_i = \frac{(4i+2,a)}{(4i+1,a)}\, n_i \ldots\; \text{VI}$$

$$\alpha_i = \frac{(4i+2,a)}{(4i+3,a)} \ldots\ldots\; \text{VII}$$

Von den Gleichungen I bis VII werden wir in den einzelnen Abschnitten Gebrauch machen, und fügen hier nur noch die numerischen Werthe bei, deren man bei der Anwendung auf das Auge bedarf.

Man kann das Auge aus dreien Linsen bestehend annehmen, welche sich berühren, und von denen die erste durch die Cornea und die vordere Fläche der Crystallinse begränzt wird, die zweite die Crystallinse selbst ist, und die dritte durch den Glaskörper gebildet wird. Hiernach und zufolge der im folgenden Abschnitt anzuführenden Mittelwerthe, wäre

$r =$	3,390 par. Linien,	Radius der Cornea
$d =$	1,531 - -	Entfernung der Cornea von der Vorderfläche der Linse
$\varrho' = r_1 =$	3,153 - -	vorderer Radius der Linse
$d_1 =$	2,040 - -	Dicke der Linse
$\varrho_1 = r_2 =$	—2,251 - -	hinterer Radius der Linse.

ferner $n = 1{,}3366$

$n_1 = 1{,}3839$

$n_2 = 1{,}3360$

Mit diesen Werthen findet man

$$\log. \frac{n_2 - 1}{r_2} = \log.(9) = 9{,}17396 . n$$

$$\log. - e_1 = \log.(8) = -\infty$$

$$\log. \frac{1 - n_1}{\varrho_1} = \log.(7) = 9{,}23184$$

$$\log. - \frac{d_1}{n_1} = \log.(6) = 0{,}16852 . n$$

$$\log. \frac{n_1 - 1}{r_1} = \log.(5) = 9{,}08550$$

$$\log. - e = \log.(4) = -\infty$$

$$\log. \frac{1 - n}{\varrho} = \log.(3) = 9{,}02839 . n$$

$$\log. - \frac{d}{n} = \log.(2) = . \ 0{,}05898 . n$$

$$\log. \frac{n - 1}{r} = \log.(1) = 8{,}99691$$

Und mit Zugrundelegung dieser Werthe:

log. (1,2) = 9,94756	log. (9,8) = 0,	log. (8,7) = 0,
- (1,3) = 7,66997	- (9,7) = 8,32797	- (8,6) = 0,16852 . n
- (1,4) = 9,94756	- (9,6) = 9,98616	- (8,5) = 9,91409
- (1,5) = 9,05149	- (9,5) = 9,14370	- (8,4) = 0,16852 . n
- (1,6) = 9,85751	- (9,4) = 9,98616	- (8,3) = 9,99028
- (1,7) = 9,37187	- (9,3) = 8,55404	- (8,2) = 0,41400 . n
- (1,8) = 9,85751	- (9,2) = 9,96736	- (8,1) = 9,85751
- (1,9) = 9,10692	- (9,1) = 9,10692	

Es muss allerdings wegen der Eigenschaft der Grössen unter der Klammer (1,9) = (9,1) und (1,8) = (8,1) sein, welche Gleichheit sich jedoch natürlich auf die letzte Dezimalstelle nicht zu erstrecken braucht.

Maassbestimmungen über das Auge.

Wir geben hier die für die optische Betrachtung des Auges hauptsächlichsten Grössenverhältnisse nach der Zusammenstellung

von Treviranus [1]). Sämmtliche Linearmaasse sind in pariser Linien ausgedrückt.

1) Axe der äusseren Seite des Augapfels:

10,2 bis 11,9	nach	Petit
12,0	-	Jurin
10,	-	Sömmerring
11, 10, 10,5	-	Tiedemann
9,7 10,5 11,0		Treviranus

Mittel 10,68

2) Dicke der Hornhaut in der Axe:

0,16 bis 0,25	nach	Petit
0,52	-	Brewster
0,3 0,4 0,54	-	Treviranus

Mittel 0,361

3) Abstand der Vorderfläche der Linse von der hinteren Fläche der Cornea, in der Axe gemessen:

1,25	nach	Petit
1,1	-	Wintringham, Helsham, Treviranus
1,3	-	Sömmerring
0,89	-	Treviranus
1,5	-	Young

Mittel 1,17

4) Dicke der Linse:

2, bis 2,25	nach	Petit
2,2	-	Brewster
1,6	-	Sömmerring
1,75 und 2,5	-	Tiedemann
2, 2 1,8 2,1	-	Treviranus

Mittel 2,04

5) Axe des Glaskörpers:

6,67	nach	Helsham
6,2	-	Sömmerring
5,5	-	Tiedemann
5,6 6,0 7,0	-	Treviranus

Mittel 6,16

1) G. R. Treviranus: Anatomie und Physiologie der Sinneswerkzeuge. Bremen 1828. Heft I. Fol.

6) Abstand der Mitte der Pupille von der hinteren Fläche der Cornea:

1,038 nach Petit

7) Radius des grössten äusseren horizontalen Bogens der Cornea:

3,5 bis 3,7			nach	Petit
3,96			-	Young
3,3			-	Sömmerring
2,65	3,12	3,27	-	Tiedemann
3,4	3,6	3,4	-	Treviranus

Mittel 3,39

8) Radius der vorderen Krümmung der Linse:

3,0 bis 4,5			nach	Petit
2,94			-	Helsham
4,2			-	Sömmerring
3,04	2,5		-	Tiedemann
2,6	3,0	2,6	-	Treviranus

Mittel 3,153

9) Radius der hinteren Krümmung der Linse:

2,5			nach	Petit
2,23			-	Helsham
2,4			-	Sömmerring
2,5	2,1		-	Tiedemann
2,0	2,2	2,08	-	Treviranus

Mittel 2,251

Eine Reihe genauer Messungen hat C. Krause in Hannover angestellt*) und wir entlehnen von seiner Mittheilung darüber die folgenden an 8 Augen gefundenen Werthe.

1) Innere Augenaxe, von der hinteren Fläche der Cornea bis zur Basis der Centralfalte der Retina

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
9,85	10,	9,8	9,5	9,55	9,55	9,4	9,45	Mittel 9,64 p. L.

2) Dicke der Cornea in der Axe

0,5	0,5	0,5	0,45	0,55	0,55	0,63	0,62	Mittel 0,54 - -

3) Dicke der Linse

2,	1,9	2,4	2,2	1,85	2,35	1,8	1,85	Mittel 2,04 - -

*) Meckel's Archiv. Band VI. Poggend. Annal. Band 31 und Band 39.

4) Entfernung der vorderen Fläche der Linse von der hinteren Fläche der Cornea:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1,2	1,35	1,25	1,35	1,25	1,2	1,	1,	Mittel 1,20 p. L.

5) Entfernung der Hinterfläche der Linse von der Retina:

6,65	6,8	6,1	5,9	6,4	6,0	6,65	6,55	Mittel 6,38 p. L.

6) Entfernung der Pupille von der Hornhaut:

1,	1,15	1,25	—	1,1	1,1	0,9	0,9	Mittel 0,93 - -

7) Radius der Cornea:

4,38	4,12	3,67	3,91	3,84	3,78	3,86	3,72	Mittel 3,91 - -

8) Halbe grosse und halbe kleine Axe der vorderen Linsenfläche:

2,05	2,	2,	2,05	2,03	1,95	2,03	2,	Mittel 2,01 p. L.
0,95	0,91	1,14	1,10	0,83	0,98	0,95	0,94	- 0,98 - -

9) Parameter der Hinterfläche der Linse:

4,49	4,99	4,99	4,51	4,83	4,53	4,09	3,79	- 4,53 - -

10) Halbe grosse und halbe kleine Axe der Krümmung der Retina:

5,12	5,05	5,12	5,07	5,14	5,05	5,05	4,93
4,45	4,15	4,23	4,41	4,58	4,43	4,41	4,19

Ueber das Brechungsverhältniss der durchsichtigen Theile des Auges besitzt man Messungen von Hawskbee, Monro, Young, Chossat, Brewster (siehe Treviranus am angef. Orte). Für den Brechungsindex der Luft = 1, des Wassers = 1,3358, ergaben die Messungen

	Chossat.	Brewster.
Für die wässrige Flüssigkeit	1,338	1,3366
- - Linse im Ganzen	1,384	1,3839
- - (äussere Schicht)	1,338	1,3767
- - - (mittlere -)	1,393	1,3786
- - - (Kern)	1,420	1,3999
- - Glasfeuchtigkeit	1,339	1,3360

Ueber den Durchmesser der Pupille hat Olbers Messungen angestellt, indem er bei verschiedenen Entfernungen seine eigene Pupille im Spiegel betrachtete und ihre Weite durch zwei, der Cornea möglichst genäherte Zirkelspitzen bestimmte. Der Durchmesser der Iris war 4,'''9.

Entfernung.	Durchm. der Pupille.
4 Zoll	2,01 par. Linien

Entfernung.	Durchm. der Pupille.
8 Zoll	2,19 par. Linien
12 -	2,36 - -
16 -	2,50 - -
20 -	2,62 - -
24 -	2,70 - -
28 -	2,74 - -

Lambert bestimmte dieselbe Grösse, indem er sein Auge in verschiedene Entfernungen von der Oeffnung im Fensterladen einer finstern Stube brachte, und hierauf möglichst rasch die Weite der Pupille in einem nahe gehaltenen Spiegel maass. Er fand*)

Entfernung.	Durchm. der Pupille.
1 Fuss	1,14 par. Linien
2 -	1,50 - -
3 -	1,70 -
4 -	1,89 - -
5 -	2,08 - -
6 -	2,31 - -
7 -	2,53 - -
8 -	2,78 - -
9 -	2,89 - -
10 -	3,15 - -

Der Durchmesser seiner Iris betrug 4,‴70.

Aehnliche Versuche über denselben Gegenstand theilt Hueck mit **).

Von der Entfernung der Bilder im Auge und der Adaptirung.

Die Entfernung der Bilder im Auge bei einer gegebenen Entfernung der Objecte kann leicht aus den Formeln berechnet werden, welche im Abschnitt „Weg der Lichtstrahlen im Auge“ enthalten sind. Es war dort (V)

$$\frac{b_i}{n_i} = \frac{(4i, a)}{(4i+1, a)},$$

*) Lambert: Photometria u. s. w. Augsburg 1760 §. 853.

**) A. Hueck: Die Bewegung der Crystalllinse. Dorpat 1839. pag. 47.

wo a die Entfernung hinter der ersten Linsenfläche bedeutet, in welcher der einfallende Strahl die Axe trifft; b_i dieselbe Entfernung, gemessen von der Vorderfläche der i+1sten Linse für den gebrochenen Strahl. Da beim Auge i=2 ist, so geht die letztere Gleichung über in

$$\frac{b_2}{n_2} = \frac{(8, a)}{(9, a)}.$$

Nun ist, nach der Art wie die Grössen unter der Klammer gebildet werden,

$$(8,a) = a\ (8,1) + (8,2)$$
$$(9,a) = a\ (9,1) + (9,2)$$

Befindet sich ferner ein leuchtender Punkt in der Axe, und zwar in der Entfernung a *vor* der ersten Linsenfläche (welche hier die Cornea ist), so ist in der letzten Gleichung a negativ zu nehmen, und so ergiebt sich

$$b_2 = \frac{(8,2) - a(8,1)}{(9,2) - a(9,1)} \cdot n_2 \ldots. \quad \text{VIII.}$$

Wie man sieht, hängt b_2 bloss von a und von der Einrichtung des Linsensystems ab, aber keineswegs von dem Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Axe bildet. Das gefundene b_2 gilt somit für alle Strahlen, die der leuchtende Punkt aussendet, vorausgesetzt nur, dass sie unendlich kleine Winkel mit der Axe bilden; d h. der leuchtende Punkt wird sich in der Entfernung b_2 abbilden.

Für die mittleren Dimensionen des Auges nach *Treviranus* ergab sich nach dem angeführten Abschnitt

$$(8,2) = -2{,}59423 \qquad \log.\ (8,1) = 9{,}85751$$
$$(9,2) = +0{,}92761 \qquad \log.\ (9,1) = 9{,}10692$$
$$\log. n_2 = 0{,}12581$$

Hierbei liegt die pariser Linie zum Grunde, und in dieser Einheit muss auch die Entfernung a ausgedrückt werden. b_2 ist von der hinteren Fläche der Crystalllinse gemessen; addirt man hierzu 3,'''571, so erhält man die Entfernung der Bilder von der Cornea aus.

Aus der Gleichung (VIII) ergiebt sich nun:

a in Zollen	b_2 in Linien	b_2 von der Cornea
∞	7,523	11,094
30	7,755	11,326

a in Zollen	b_2 in Linien	b_2 von der Cornea
15,3	7,986	11,557
10,4	8,218	11,789
7,9	8,450	12,021
6,5	8,681	12,252
5,5	8,913	12,484
4,8	9,144	12,715
4,3	9,376	12,947

Anmerk. Sollte man es zu angenäherten Rechnungen bequemer finden, eine einzige brechende Fläche, die Cornea, anzunehmen, so könnte diess geschehen, wenn man den Radius derselben 3‴,39 beibehielte, der Substanz aber einen Brechungsindex 1,4416 = n beilegte. Die Entfernung der Bilder von der Cornea würde dann $\frac{nra}{(n-i)\,a-r}$ betragen, d. h. für $a=\infty$ 11‴,07,

=30″ 11,31,
=4″,3 13,00,

welches eine genügende Uebereinstimmung gewährt.

Wie man aus den angegebenen Werthen von b_2 sieht, trifft selbst im günstigsten Fall das Bild die Retina nicht, sondern bildet sich erst später. Der günstigste Fall ist der, wo das Object unendlich entfernt; dann liegt sein Bild 11‴,09 hinter der Cornea, während die Retina nur 9‴,83 davon entfernt ist. Daraus jedoch darf man nicht folgern, wie es Einige gethan haben, dass unsere Lehre vom Sehen, nach welcher deutliche Bilder auf die Retina fallen müssen, unrichtig sei, sondern nur dass die Dimensionen des Auges oder das Brechungsverhältniss der einzelnen Theile desselben nicht genau genug bestimmt seien. Wie liesse sich auch eine grosse Genauigkeit bei so schwierigen Messungen und bei einem Theile, der nach dem Tode Veränderungen unterworfen ist, erwarten? Nach Vallée *) soll die Differenz der Rechnung mit der Wirklichkeit daher rühren, dass der Glaskörper nicht homogen sei, vielmehr aus Schichten bestehe, welche nach hinten an Dichtigkeit zunehmen. Diess wäre eine der vielen möglichen Erklärungen, welche nur das eine gegen sich haben, dass sie nicht

*) Vallée: Mémoire sur la théorie de l'oeil. 3me. Siehe Comptes rendus hebd. Paris. Tome XIV. pag. 481.

thatsächlich nachgewiesen worden. Uebrigens bringt es die Lage dieses Gegenstandes (die Entfernung der Bilder von der Cornea) mit sich, dass man für jetzt von den ferneren Untersuchungen wird abstrahiren müssen; es würde z. B. kaum lohnen, den eigenthümlichen Bau der Linse, die nicht vollkommene Sphärizität der Flächen des Auges in Betracht zu ziehen. Auch ist man vorläufig genöthigt, die mittleren Dimensionen aus den Messungen an vielen Augen anzuwenden, obgleich Krause und Treviranus sonst mit Recht bemerken, dass man eigentlich jedes Auge für sich zu betrachten habe.

Was nun die Adaptirung des Auges betrifft, so kann man in dieser ganzen Sphäre kaum ein Thema finden, über welches verschiedenartigere Ansichten aufgestellt seien. Ja wir begegnen gleich von vorn herein der Meinung ausgezeichneter Gelehrten, nach welcher das Auge in allen Entfernungen, mit Ausnahme der gar zu kleinen, deutlich sehe, ohne dass wesentliche Veränderungen in den Refractionsverhältnissen eintreten sollen. (Haldat will in neuester Zeit an der Crystalllinse des Ochsen beobachtet haben, dass sie convergente, parallele und divergente Strahlen in einer und derselben Entfernung vereinige, und läugnet demnach jede Adaptirung! (Comptes rendus etc. Mai 1842.) Ansichten dieser Art sind jedoch nicht haltbar. Man ist schon nicht im Stande, zwei ungleich entfernte Objecte zu gleicher Zeit deutlich zu sehen, sondern nur das eine oder das andere, worüber Hueck folgende nähere Angaben macht *). Man sehe bald nach einem möglichst nahen (5 bis 7 Zoll entfernten) Gegenstand, und bald nach einem weit abstehenden, und wechsele hierin so rasch als möglich. Man wird dann gewahr werden, dass es immer einer grossen Zeit bedarf, um das Auge aus dem einen Zustand in den andern zu versetzen. Sodann bemerkt man, dass es leichter ist, beim Fixiren eines Objects gleichzeitig ein anderes seitwärts vom Axenpunkt belegenes und also eben so deutliches, zu beachten, als bei Betrachtung eines entfernten Objects auf das nahe, oder umgekehrt, zu achten. Man kann es durch längere Uebung sogar dahin bringen, das Auge zum Nahesehen, durch die blosse Vorstellung desselben einzurichten, ohne dasselbe auf einen nahen

*) A. Hueck: Die Bewegung der Krystall-Linse. Dorpat 1839. pag. 20.

Gegenstand lenken zu müssen, und eben so zum Fernsehen. Hueck, Joh. Müller und Volkmann vermögen diess. Der erstere giebt an, dass, um die Adaptirung für die Ferne, bei einem nahe gehaltenen Gegenstand und trotz desselben, zu erreichen, er so thue, als wolle er durch den Gegenstand hindurchsehen. Sind es Buchstaben, so erscheinen sie dann, wegen der Zerstreuungskreise, schattig. Dergleichen Versuche muss man nur mit einem Auge, während das andere geschlossen ist, anstellen, weil sonst Doppelbilder entstehen würden.

Anderweitige Thatsachen, welche die Nothwendigkeit der Adaptirung darthun, findet man ausser bei Hueck auch bei Burow *), Volkmann **) und in Joh. Müller's Betrachtung des Gesichtssinnes ***).

Ich selbst habe über die Adaptirung etwas anzuführen, wodurch sie so gut wie unzweifelhaft bewiesen wird, nämlich den Nutzen derselben, auf den bis jetzt meines Wissens noch nicht aufmerksam gemacht worden ist. In dem Abschnitt über das Schätzen der Entfernungen u. s. w. werde ich zeigen, dass erhebliche Vortheile dem Sehen aus dieser Adaptirung erwachsen, und dass das Auge sogar ein feines Gefühl von der Adaptirung habe.

Obgleich das Auge sich adaptirt, so muss man sich doch vor dem Irrthum hüten, in den mehrere Autoren bei dieser Gelegenheit gefallen sind, indem sie nämlich ein Bild von geometrischer Genauigkeit auf der Retina voraussetzen. Diese Voraussetzung ist den bekannten Thatsachen so widersprechend, dass selbst diejenigen, die sie theilen, genöthigt sind, in der Anwendung eine bedeutende Milderung eintreten zu lassen. Sie sagen, ein normales Auge sehe die Gegenstände in allen Entfernungen, (mit Ausnahme der zu kleinen) vollkommen deutlich. Was verstehen sie hierunter? Kann man irgend einem Auge eine vollendet deutliche Wahrnehmung zuschreiben, wenn jeder den Gesichtswinkel vergrössernde Apparat die Gegenstände anders zeigt, als sie mit blos-

---

*) Burow: Beiträge zur Physiologie und Physik des menschlichen Auges. Königsberg 1841.

**) Volkmann: Neue Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes. Leipzig 1836.

***) J. Müller: Handbuch der Physiologie des Menschen. Coblenz 1838. Band 2. Abtheil. 2.

sem Auge gesehen werden können? Das gute Auge, fährt man fort, sieht z. B. in allen Entfernungen die Linie als Linie. Die etwa auf Papier gezogene Linie ist nun aber keine Linie, wie jedes Mikroskop beweiset. Diess ist zu offenbar, als dass es unberücksichtigt hätte bleiben können, und man lässt also eine Modification jener Voraussetzung vollkommen deutlicher Bilder eintreten. Man spricht ausser von Deutlichkeit auch von Schärfe der Wahrnehmung; die Unregelmässigkeiten der Linie werden, wie man angiebt, deshalb nicht wahrgenommen, weil ihr Bild auf der Retina zu klein ausfällt und weil Bilder, welche eine bestimmte Grösse nicht erreichen, auch nicht mehr percipirt werden.

Die Unterscheidung von Deutlichkeit und Schärfe kann man sich sehr wohl gefallen lassen. Die Deutlichkeit wird abhängen von der Anordnung der brechenden Substanzen des Auges; die Schärfe der Wahrnehmung wird von der Empfindlichkeit der Retina, von der Feinheit und der gedrängten Lage der Nervenendigungen, aus denen sie besteht, abhängen. Beide Momente sind demnach sehr verschieden; allein wie wird man sie in dem Endresultat unterscheiden? Dieses Endresultat ist kein anderes, als ein nicht vollkommen percipirter Gegenstand. Wozu würde nun auch die absolute Deutlichkeit dienen, wenn die Schärfe nicht absolut ist, und auch nicht wohl absolut sein kann, da ja die Nervenenden doch keine mathematischen Punkte sind. (Siehe über diesen Gegenstand auch Volkmann in dem angef. Werke p. 118.)

Lässt sich nichts anführen, woraus die Nothwendigkeit geometrisch genauer Bilder im Auge erhellte, so ist der Beweis für das Gegentheil, dass nämlich diese Bilder unvollkommen seien, desto leichter. Das Auge ist nicht achromatisch. Man sieht z. B. immer farbige Ränder, wenn man Doppelbilder hat, sei es, dass man mit einem Auge durch zwei feine Oeffnungen nach einem Gegenstand sieht, oder auf die gewöhnliche Weise mit beiden Augen Doppelbilder hervorbringt. Sind diess Farbensäume bei nicht richtiger Vereinigungsweite, so hat Frauenhofer den Mangel an Achromasie direct bei richtig adaptirtem Auge nachgewiesen *). Er liess nach und nach die Farben des Spectrums in das Fernrohr eines Theodolithen fallen, und den Micrometerfaden desselben

*) Gilbert: Annalen der Physik. Band 56 pag. 314.

beleuchten. Geschah diess durch das rothe Licht und war das Ocular so gestellt, dass der Faden deutlich gesehen wurde, so sah man ihn nicht, wenn die Beleuchtung durch blaues Licht bewirkt wurde. Das Ocular musste dem Faden jetzt näher gerückt werden, und zwar um mehr als das Doppelte der Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung der Ocularlinse. Frauenhofer fand, dass in seinem Auge parallele, also aus unendlicher Entfernung kommende, rothe Strahlen dieselbe Vereinigungsweite hatten als blaue, welche im Mittel aus einer Entfernung von 20,6 Zoll divergirten. (Die einzelnen Beobachtungen an zweien Ocularen aus Crownglas und zweien aus Flintglas gaben 23,″7. 21,″3. 19,5 17,9.) Auf den Antheil, den die Farbenzerstreuung der Linse hat, ist hierbei Rücksicht genommen.

Für die nicht vollkommene Deutlichkeit der Bilder im Auge spricht dann ferner die Irradiation, oder die Ausbreitung des Lichts auf der Retina, jene wohlbekannte Thatsache, dass helle Gegenstände uns zu gross erscheinen. Die Theorie, welche man hierüber gewöhnlich aufstellt, sieht in dem Phänomen der Irradiation eine eigenthümliche Wirkung der Retina, vermöge welcher Theile derselben von benachbarten mit erregt werden, und es ist möglich, dass die Voraussetzung vollkommen deutlicher Bilder durch den brechenden Apparat des Auges, von der man als unbezweifelt ausging, eine Theorie dieser Art aufstellen liess. Ich werde später in einem eigenen Abschnitt zeigen, dass keine Erscheinung über die Irradiation bis jetzt bekannt sei, welche eine eigenthümliche Wirkung erkennen liesse, dass vielmehr der Mangel deutlicher Bilder zur Erklärung hinreichend sei. Wie es nun hiermit auch stehen mag, so ist jedenfalls eine Irradiation im Auge vorhanden, und daher kann wiederum von vollkommen deutlichen Bildern nicht die Rede sein. Die Wahrnehmung täuscht hierüber leicht. Man betrachte das Bild in einer mässig guten camera obscura, und man wird es für ein sehr deutliches halten; wendet man jedoch eine Blendung an, so wird man bald finden, dass man die Deutlichkeit überschätzt habe. Auch bei einer guten camera obscura ist es aus mangelnder Uebung keine leichte Sache, sie auf ein Object gehörig einzustellen, und man bleibt innerhalb eines mehr oder minder grossen Intervalls über den eigentlichen Ort des Bildes ungewiss, zum Beweise, dass un-

ser gewöhnliches Urtheil über die Deutlichkeit kein sehr sicheres sei *).

Nachdem wir nunmehr das Vorhandensein der Adaptirung nachgewiesen, kömmt es darauf an, messende Beobachtungen darüber anzustellen. Wenn man nach Porterfield's Angabe einen weissen Faden auf schwarzem Grunde ausspannt, und längs des Fadens sieht, so erscheint derselbe bekanntlich einfach und als Faden erst von einer gewissen Entfernung ab, und bleibt es während eines verschiedentlich grossen Intervalls. Vor und hin-

*) Bei dieser Gelegenheit will ich ein Paar Worte über das Einstellen einer camera obscura hinzufügen, ein Gegestand, der in jetziger Zeit nicht ohne Wichtigkeit ist. Lambert hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem vorigen Jahrhundert die Frage behandelt, woher es rühre, dass die Bilder, welche die convexe Linse giebt, auf der Tafel zu kleben scheinen, und keinen perspectivischen Eindruck hervorbringen. Ich habe den Aufsatz nicht zur Hand, und erinnere mich nur der Aufgabe, aber nicht der Art, wie Lambert sie gelöst hat. Die richtige Lösung ist aber jedenfalls diese: Die gute Linse, d. h. diejenige, welche von den Abweichungen möglichst frei ist, giebt ein perspectivisches Bild; bei dem Bilde einer schlechten Linse mit zu grosser Apertur mangelt dieser perspectivische Eindruck und es scheint wie auf der Tafel zu kleben, worauf man es fallen lässt. Das Auge überträgt dasselbe Urtheil auch auf photographische Bilder, die mittelst solcher Linsen angefertigt worden sind. Daher reicht zu einem vollendet treuen Bilde die gute Linse noch nicht hin, sie muss auch sehr scharf eingestellt werden. Und diess eben ist schwieriger, als man glaubt; es ist mir mit der schönen Doppellinse, welche Voigtländer und Sohn in Wien nach Professor Petzvàl anfertigen, erst nach längerer Uebung gelungen, und gelingt nach meinen Erfahrungen Anderen gar nicht. Es ist also dem Auge nicht so leicht, innerhalb eines gewissen Intervalls, die verschiedenen Grade der Deutlichkeit zu beurtheilen, und das darf bei manchen Fragen, die über das Auge aufgestellt werden, nicht übersehen werden. Wenn man eine Linse möglichst scharf einstellen will, so finde ich es am zweckmässigsten, Zahn und Trieb, durch welchen dieselben jetzt gewöhnlich bewegt werden, nicht anzuwenden, denn diese Bewegung ist wegen des todten Ganges unregelmässig und springend. Viel besser ist es, wenn man die Bewegung durch Drehen eines Rohres in einem andern bewirkt. Das Auge vergleicht dann, wenn man es unabänderlich auf einen feinen Theil des Bildes fixirt (wo möglich stets auf denselben), die auf einander folgenden Grade der Deutlichkeit, und die Hand bringt leichter denjenigen zurück, den das Auge für den höchsten erkannte. Loupen thun hierbei gute Dienste, besonders wenn sie mittelst einer Röhre auf der matten Glastafel aufgesetzt werden und alles seitwärts kommende Licht abhalten.

ter diesem Intervall erscheint der Faden flächenhaft ausgebreitet, und die Ausbreitung nimmt zu, je weiter von derselben entfernt der Faden fixirt wird. Sonach erhielte man hierbei eine untere und eine obere Gränze für die Adaption, und man könnte z. B. sagen: das Auge adaptire sich für Gegenstände, welche 5 bis 6 Zoll entfernt seien. Dem Vorhergehenden zufolge kann jedoch hiermit nicht gemeint sein, dass in diesem Intervall der Faden vollkommen deutlich gesehen werde; das wird er niemals. Sondern es kann darunter nur verstanden sein, dass innerhalb dieser Gränzen die Undeutlichkeit nicht bedeutend genug sei, den Faden und ähnliche (vollends grössere) Objecte in der Wahrnehmung sehr zu verändern.

Inzwischen ist es mir nicht geglückt, auf diese Weise zu irgend genauen Werthen zu gelangen, und ich wandte mich an die Erscheinung der Doppelbilder, welche mittelst zweier feinen Oeffnungen von einem Gegenstande erhalten werden, der zu nahe oder zu entfernt ist, als dass seine Strahlen sich auf der Retina selbst, und nicht vielmehr hinter oder vor ihr vereinigen. Auch bei diesem, von Scheiner angegebenen Experiment giebt es eine obere und untere Gränze, zwischen welchen das Object einfach erscheint, und auch für diese Gränzen gilt das, was so eben bei der ähnlichen Erscheinung des Fadens bemerkt worden ist.

Auf einer messingenen Skale von 18 Zoll Länge war eine feine Spitze mittelst eines Index zu verschieben; an dem Anfang der Skale befand sich eine Metallscheibe mit zweien feinen Oeffnungen, durch welche gegen eine weisse, dem Tageslicht ausgesetzte Tafel, visirt wurde. Die Spitze, welche bei zu grosser Nähe doppelt erscheint, wurde allmählig entfernt, bis sie einfach erschien; hierauf so weit weggeschoben, dass sie wiederum doppelt wurde und dann allmählig genähert, bis beide Bilder zusammenfielen. Trotz angewandter Sorgfalt war ich aber auch hierbei nicht im Stande, gut zusammenstimmende Werthe zu erhalten, und ich theile, diess nachzuweisen, von vielen Beobachtungsreihen, die ich anstellte, eine mit, welche rasch hinter einander ausgeführt wurde.

Einfaches Bild

	beim Entfernen der Spitze		beim Nähern der Spitze	
in	4″	9,‴5	5″	1,‴
	4	11,5	6	1,
	5	5,	5	3,5
	4	8,	6	0,
	5	5,	5	8,8
	5	1,5	5	11,5
	5	1,5	6	1,
	5	4,5	6	5,2
Mittel	5″	1,‴3	5″	10,‴

Ich glaube zweien Umständen den wenigen Erfolg dieser Versuche zuschreiben zu müssen. Einmal ist es von erheblichem Einfluss, wenn die beiden Oeffnungen vor der Pupille verschoben werden, und zwar desshalb, weil die Crystalllinse am Rande ein geringeres Brechungsverhältniss hat, als mehr nach der Mitte zu. Hiervon überzeugt man sich leicht. Man stelle die Spitze so, dass sie einfach erscheine, und verschiebe nun die beiden Oeffnungen, durch welche man sieht, längs der Pupille, so wird man die Spitze bald einfach, bald doppelt sehen, und verdeckt man die eine oder andere Oeffnung, so überzeugt man sich, dass am Rande der Pupille eine geringere Brechungsfähigkeit vorhanden sein muss. Es kömmt daher bei diesen Versuchen viel auf die unabänderliche Stellung des Auges gegen die beiden Oeffnungen an. Um diess so gut als möglich zu erreichen, verfuhr ich so, dass ich das Auge hinter der Scheibe hin und her bewegte, bis die beiden Spitzen und die hellen Kreise, in welchen sie zu stehen scheinen, gleiche Lichtstärke besassen. Der zweite störende Umstand ist der, dass die Feuchtigkeit, mit welcher die Cornea überzogen ist, namentlich bei fortgesetzten Versuchen eine nicht regelmässe Gestalt annehmen mag. Sähe man mit freiem Auge, so würde der störende Einfluss solcher Stellen verschwinden, anders jedoch, wenn man durch feine Oeffnungen sieht, wo dergleichen Unregelmässigkeiten sich sehr geltend machen können.

Wenn auch durch diese Versuche, die ich auch von anderen Personen anstellen liess, das fragliche Intervall mit keiner grossen Genauigkeit gefunden werden kann, so scheint doch mindestens so viel gewiss, dass für die meisten der vorkommenden Augen

ein solches Intervall vorhanden sei. Es ist nicht richtig, wenn mehrere Physiologen und Physiker der Meinung sind, dass bei dem sogenannten normalen Auge von einem dergleichen Intervall nichts vorkomme, dass dieses Auge vielmehr von einer gewissen verhältnissmässig kleinen Entfernung ab bis ins Unendliche die Spitze durch zwei Oeffnungen einfach sehen würde. Wir werden sogleich nachweisen, auf welche Art sich die verschiedenen Augen in Bezug auf dieses Experiment verhalten und wollen vorläufig nur bemerken, dass bis jetzt nichts bekannt sei, welches einen spezifischen Unterschied zwischen den verschiedenen Augen aufzustellen berechtigte. Mit Bezug auf die im Leben am häufigsten vorkommende Gegenstände ist allerdings das Auge das brauchbarste, welches die Objecte weder in zu grosse Nähe bringt noch dieselben zu weit entfernt, und die meisten Beschäftigungen (Lesen, Schreiben u. s. w.) sind auch den Anforderungen dieses Auges gemäss eingerichtet. Allein doch ist, optisch genommen, kein erheblicher Unterschied zwischen diesen Augen und den kurzsichtigen, und obgleich diese letzteren einen so kleinen Spielraum haben, berechtigt bis jetzt nichts, ihnen eine kleinere Adaptionsfähigkeit zuzuschreiben.

Die zu Anfang dieses Abschnitts mitgetheilte Tafel über die Entfernung der Bilder b_2 für gewisse Entfernungen der Objecte a habe ich nämlich so eingerichtet, dass die aufeinanderfolgende Werthe von b_2 die constante Differenz $0''',2316$ haben. Ich werde diese Differenz das Maass der Adaptionskraft nennen und voraussetzen, dass, wenn bei irgend einem Auge Bilder in der bestimmten Fntfernung b_2 deutlich seien, das Auge die Fähigkeit habe sich so zu verändern, dass es andere Bilder in der Entfernung $b_2 + 0''',2316$ mit gleicher Deutlichkeit sehe. Wenn diess der Fall ist, so wird nach jener Tafel ein Auge Objecte deutlich sehen:

in der Entfernung von $4'',3$ bis $4,8$
oder — — — — — $10,4$ — $15,3$ u. s. w.
oder — — — — — $30''$ — ∞

hier wäre also ein sehr verschiedener Spielraum der Adaptirung, während die zu Grunde liegende Kraft doch dieselbe ist, nur der Effect dieser Kraft ist verschieden, und das ist im Allgemeinen gerade dasjenige, was die Erfahrung zeigt.

Es versteht sich hierbei von selbst, dass wir auf die Differenz

in der Bildweite von 0''',2316 gerade kein besonderes Gewicht legen, obgleich dieselbe von der Wahrheit nicht viel entfernt sein dürfte. Wir brauchen ferner nicht zu wiederholen, dass wir nicht die Absicht haben, das in Rede stehende Intervall der Adaptirung für ein solches auszugeben, innerhalb welches die Bilder vollkommen deutlich seien, sondern nur für dasjenige Intervall, innerhalb welches Bilder von relativ kleinen Gegenständen nicht wesentlich verändert erscheinen. Ich kann keinen anderen Begriff mit dem verbinden, was man bei den Wahrnehmungen des Auges Deutlichkeit nennt. Es wird auch gut sein zu bemerken, dass die Entfernungen, in welchen die Spitze einfach erscheint, nicht diejenigen sind, in welchen das betreffende Auge die gewöhnlichen Beschäftigungen vornimmt, dass vielmehr die Kurzsichtigen die Gegenstände mehr entfernen, wahrscheinlich weil die grössere Undeutlichkeit durch den Vortheil aufgewogen wird, beide Augen ohne Anstrengung gebrauchen zu können. Endlich möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass die Hypothese von der gleichen Adaptionskraft der verschiedensten Augen nur für die gewöhnlich vorkommenden gilt, und durch einzelne Individuen mit einem überwiegend grossen oder kleinen Adaptionsintervall nicht wohl widerlegt werden kann.

Was die Behauptung betrifft, dass es auch für die normalen Augen eine Gränze geben wird, jenseits welcher sie die Spitze durch zwei Oeffnungen wiederum doppelt sehen, so ist, wie gesagt, vorauszusehen, dass sie bei der Vorstellung, die man häufig von der Natur dieser Augen hat, Widerspruch erfahren wird. Dass er jedoch nicht begründet wäre, ersieht man schon daraus, dass wenn ein solches Auge durch ein stark vergrösserndes Mikroskop sieht, es eben so genau einstellen muss als die anderen Augen, was freilich nur dann wird gehörig beachtet werden können, wenn es sich um das Erkennen sehr kleiner Gegenstände handelt, die gewissermassen die Gränze der Leistungen des Instruments bilden. Ausserdem spricht für die Richtigkeit jener Behauptung Volkmann, welcher sich so äussert *): „Treviranus hat Unrecht, wenn er den entscheidenden Versuch Scheiner's nur für kurzsichtige Augen gültig hält. Ich habe gefunden, dass

*) Im angef. Werke pag. 121.

auch die weitsichtigsten Menschen durch zwei Kartenlöcher ein hinreichend entlegenes Object doppelt sehen."

Und endlich lassen die Untersuchungen Burow's*) hierüber keinen Zweifel zu. Er hat über die Adaptionsfähigkeit im Allgemeinen dieselbe Ansicht, als vorher entwickelt worden, und hat an vielen Individuen mit einem ähnlichen Instrument, als dem beschriebenen, Versuche über das Adaptionsintervall angestellt. (Burow führt an, und es ist zur Beurtheilung der folgenden, von ihm an 11 Individuen gefundenen Werthe nöthig zu wissen, dass trotz der Einfachheit des Experiments es nur wenige Menschen gebe, die nicht zu ungeschickt wären, es anzustellen.)

Einfaches Bild	
beim Entfernen der Spitze	beim Nähern der Spitze
in 2″	2″,9
4,3	6,7
5,8	9,2
6,5	12,5
6,8	12,5
7,3	13,3
8,3	15,
9,2	16,3
12,3	20,5
15,	50,
21,7	∞

Einige dieser Zahlen sprechen für die vorausgesetzte Differenz von 0‴,2316 in dem Werthe von b_2; andere entfernen sich davon, was bei der Natur solcher Beobachtungen nicht anders erwartet werden kann. Da, wo es im Folgenden einer positiven Annahme bedarf, werden wir es bei der unsrigen bewenden lassen.

Was die Art betrifft, wie die Adaptirung im Auge vor sich geht, so giebt es darüber so viele Ansichten, als möglich sind. Die Verlängerung und Verkürzung des ganzen Augapfels, die Veränderung des Radius der Cornea, der Entfernung zwischen Cornea und Linse, der Radien dieser letzteren und endlich Veränderungen des Brechungsverhältnisses hat man zum Behuf der Adaptirung in Anspruch genommen, und

*) Im angef. Werke pag. 164.

wir wollen zuvörderst die eine oder andere dieser Ansichten durch die Rechnung verfolgen.

Was die Veränderung der Axe des Augapfels betrifft, so müsste dieselbe 0''',2316 betragen, wenn das Auge innerhalb des besprochenen Intervalls sich adaptiren sollte.

Was die Veränderung in dem Radins der Cornea anbelangt, so kann man sie auf folgende Art finden. Zwischen a und b_2 hatten wir zu Anfang dieses Abschnitts die Gleichung

$$b_2 = \frac{(8,2) - a\,(8,1)}{(9,2) - a\,(9,1)}\, n_2 \;\ldots\ldots\; \text{VIII.}$$

Man setze $(8,1) = (1)\;(8,2) + (8,3)$

$$(9,1) = (1)\;(9,2) + (9,3),$$

und der Kürze halber $\frac{b_2}{n_2} = p$,

so erhält man $$(1) = -\frac{(8,3) - p\,(9,3)}{(8,2) - p\,(9,2)} + \frac{1}{a} \ldots \text{IX}$$

Nun ist $(1) = \frac{n-1}{r}$ und r der Radius der Cornea, somit kann aus dieser Gleichung für beliebige Werthe von a und b_2 der entsprechende Halbmesser der Hornhaut gefunden werden.

Wir wollen diese Gleichung zuerst benutzen r für den Fall zu bestimmen, dass das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes genau auf die Retina falle. Nach den angegebenen mittleren Dimensionen des Auges müsste also für $a = \infty$

$b_2 = 6''',26$ sein, und somit findet sich $r = 2''',884$,

während im Mittel der Radius der Hornhaut = 3''',39 gefunden worden ist. Mile ist nun auch der Meinung, dass dieser letztere, unsern Rechnungen zu Grunde liegende Radius zu gross sei, und dass überhaupt, wenn die Bilder nach der Rechnung nicht auf die Retina fallen, dies von der Veränderung des fraglichen Halbmessers nach dem Tode herrühre. Er giebt an, dass ein vor das Auge lebender Menschen gehaltener Kartenausschnitt von 3''', Radius mit der Corneakrümmung der meisten Augen zu passen scheine, dass dagegen einer von 3''',3 zu gross sei *). Wenn diess sich wirklich so verhält, so muss der Radius noch kleiner angenommen werden, denn Mile hat sicherlich mit dem Kartenaus-

*) Mile: Ueber die Richtungslinien des Sehens. Poggend. Ann. Bd. 42. pag. 61.

schnitt die Cornea nicht berührt, wegen der Empfindlichkeit der sie überkleidenden Conjunctiva.

Die Gleichung IX. kann man ferner benutzen um die Veränderung im Radius der Cornea zu berechnen, damit das Auge sich für das oben besprochene Intervall adaptire.

Man setze z. B. $a = 30'' = 360'''$

$b_2 = 7''',5232$ (ein Werth, welcher für das unveränderte Auge der Entfernung $a = \infty$ zugehört), so erhält man $r = 3''',298$.

Die Veränderung des Hornhauthalbmessers von beiläufig $\frac{1}{10}$ Linie würde also die Adaptirung innerhalb des bezeichneten Intervalls erklären.

Eine andere, jetzt viele Anhänger zählende Hypothese lässt die Distanz zwischen Cornea und Linse variiren, und auf folgende Weise würde man die nöthige Rechnung hierüber anstellen. Man setze in IX für $(8,2)$, $(2)(8,3) + (8,4)$

„ $(9,2)$, $(2)(9,3) + (9,4)$

und erhält
$$(2) = -\frac{(8,4) - p\,(9,4)}{(8,3) - p\,(9,3)} + \frac{a}{1 - (1)\,a} \;\ldots\; X$$

Nun ist $(2) = -\frac{d}{n}$, wo d die Entfernung der vorderen Linsenfläche von der Cornea bedeutet; also giebt die letzte Gleichung für beliebige Werthe a und b_2 den entsprechenden von d.

Wenn man die Adaptirung durch die Verschiebung der Linse erklären will, so lässt sich zur Berechnung der nöthigen Veränderung die letzte Gleichung nicht unmittelbar anwenden. Da nämlich b_2 von der Hinterfläche der Linse gezählt wird, so verändert sich diese Grösse zu gleicher Zeit mit d. Inzwischen verfahre man so. Man setze für d $d - x$,

für b_2 $b_2 + x$,

indem man voraussetzt, dass b_2 von demselben Ort als bisher gezählt werde, also von einem Punkte in der Axe des Auges, welcher $3''',571$ hinter der vorderen Hornhautfläche liegt. Für diese Werthe wird die Gleichung X in Bezug auf x vom zweiten Grade, und zwar:

$$\frac{1}{n}\,x^2 - \left\{\frac{B}{n} + A - \frac{(9,4)}{(9,3)}\right\} x = n_2\,\frac{(8,4)}{(9,3)} - b_2\,\frac{(9,4)}{(9,3)} - A.\,B \ldots XI$$

wo mit A die Grösse $\frac{d}{n} + \frac{a}{1 - (1)\,a}$

mit B die Grösse $n_2 \frac{(8,3)}{(9,3)} - b_2$ bezeichnet worden ist.

Für angenommene Werthe von a und b_2 erhält man hieraus x. Es sei z. B. $a = 360'''$,

$b_2 = \;\; 7''',5232$,

so ergiebt die Gleichung XI den positiven Werth $x = 0''',5583$, der zweite Werth wird negativ und fiele ausserhalb des Auges.

Die Linse müsste also um etwas mehr als ½ Linie der Cornea genähert werden, wenn das Auge in 30 Zoll so deutlich sollte sehen können als in unendlicher Entfernung. Berechnet man die übrigen Adaptionsintervalle, so findet man nahe dieselbe Verschiebung von ½ Linie. Diese Art, die Adaption durch Verschiebung der Crystalllinse zu erklären, ist nicht neu; schon Kepler, Scheiner, Jurin, Porterfield, Camper nahmen sie an; aber erst in neuerer Zeit scheint sie bei den Physiologen die herrschende zu werden, wozu die gründlichen und umfassenden Untersuchungen Hueck's in dem bereits citirten Werke viel beitragen werden. Auch Burow theilt diese Ansicht und Joh. Müller scheint ihr nicht abgeneigt, obgleich er mit Recht bemerkt, dass in Bezug auf den Vorgang beim Adaptiren der Stand der Frage der ist, dass verschiedene Weisen der Erklärung möglich seien, ohne dass gerade die Richtigkeit einer besimmten vorliege.

Hueck führt für die von ihm am ausführlichsten entwickelte Ansicht folgende wichtige Beobachtungen an *):

Es stelle sich der zu Beobachtende, dessen Auge wohl gebildet und weder kurzsichtig noch fernsichtig sein muss, an das Fenster, bei einer so hellen Beleuchtung, dass die Pupille sich im Nah- und Fernsehen nicht ändert. (?) Er schliesse das eine Auge und sehe nun bald auf einen 5 Zoll nahen, bald auf einen entferntern Punkt. Hierbei ist genau darauf zu achten, dass beide Punkte sich in der Augenaxe befinden, und der bulbus durchaus unbeweglich bleibe. Jetzt stelle sich der Beobachter zur Seite des zu beobachtenden Auges, so dass er durch die Hornhaut die Iris deutlich im Profil sieht. Sind nun alle diese Bedingungen genau beobachtet worden, so sieht man, sobald sich das Auge für den nahen Gegenstand anpasst, die Vorderfläche der Iris in der Mitte gewölbt hervortreten, dagegen, sobald das Auge in die Ferne

*) Am angef. O. pag. 60.

blickt, sich wiederum abflachen. Solche Versuche hat der Verfasser an 19 Individuen in dieser Weise angestellt, von denen 6 etwas kurzsichtig waren; er sah bei allen das Hervorwölben, nur in verschiedenem Maasse. Bei jungen Personen mit normalem, gesundem Auge und stark gewölbter Hornhaut war das Hervortreten sehr deutlich und betrug, mit einem Glasmikrometer gemessen, 0,'''5 bis 0,'''75. Bei zwei sehr scharf, und nah wie fern deutlich sehenden Individuen mit einer kleineren Iris und mehr flacher Hornhaut erschien während des Fernsehens die Iris in der Mitte fast vertieft und wölbte sich nur um 0,'''4; bei Kurzsichtigen erschien die Iris auch beim Fernsehen etwas gewölbt und das Hervortreten war gering. — Aehnliche Erfahrungen, auf eine sehr scharfsinnige Weise an Thieren angestellt, ergaben dem Verfasser ähnliche Resultate.

Hueck ist der Meinung, dass das Accommodationsvermögen, welches sich also nach ihm in einer Verschiebung der Linse äussert, beim Fernsehen ruhe und nur beim Nahesehen thätig sei. Denn im Fernsehen, wenn das Auge nicht gerade scharf fixirt werde, ermüde das Auge nicht; ferner lähme anhaltendes Fernsehen die Accomodationskraft, weil sie dabei nicht geübt wird. Diese Thatsachen liessen sich, wie mir scheint, wohl auch durch Muskelbewegung erklären; der grössere Zwang beim Sehen naher Gegenstände liesse sich erklären durch die Nothwendigkeit, die Augenaxen mehr gegen einander zu neigen, welches mit Anstrengung verbunden ist, die Schwächung der Accomodationskraft bei anhaltendem Fernsehen durch die bekannte Erfahrung, dass Muskelbewegung einer steten Uebung bedarf, wenn sie nicht an Feinheit und Leichtigkeit verlieren soll. Auch der Umstand, den Hueck zur Unterstützung seiner Behauptung anführt, dass das Auge im Tode für die Ferne adaptirt, die Linse also zurückgeschoben sei, scheint nicht gerade entscheidend zu sein. Denn im Tode, wie im Schlafe, sind die Augen nach innen und oben gerichtet und hierzu gehört dann eine kleine Pupille und eine Adaption für die Nähe. Ich führe diess an, weil es mir scheint, dass ich gerade beim Fernsehen eine Anstrengung mache, und weil Hueck selbst an sich beobachtet hat, dass wenn er sein Auge für ein entferntes Object bei vorgehaltenem nahen adaptiren wolle, er so thue, als wollte er das nahe Object durchbohren. Diess innere Gefühl glaube ich bei demselben Bestreben gleichfalls

zu haben, und es spricht ausserdem nicht für die in Rede stehende Erklärung des Adaptirens, weil die Linse beim Sehen in die Ferne zurückgezogen werden muss. Allein es ist mit solchen inneren Gefühlen eine eigene Sache; sie sind meist zu unbestimmt, als dass man grosses Gewicht darauf legen dürfte. Volkmann hat gegen die fragliche Theorie der Adaptirung einen scharfsinnigen Einwand gemacht *). Er giebt an, dass wenn bei einer gewissen Entfernung der Crystalllinse von der Cornea, zwei Objecte, die nicht in der Augenaxe liegen und also durch indirectes Sehen wahrgenommen werden, sich decken, diese Deckung aufhören muss, wenn die Linse ihre Lage ändert. Theoretisch ist diese Bemerkung vollkommen richtig. In dem folgenden Abschnitt haben wir die Lehre von den optischen Hauptpunkten im Auge entwickelt und gefunden. dass dieselben 3,'''193 und 3,'''276 von der Cornea entfernt liegen, wobei vorausgesetzt ist, dass die Vorderfläche der Linse um 1,531 von der Hornhaut abstehe. Bewegt sich nun aber die Linse, wie vorher berechnet worden, um 0,'''5583 nach vorn, dann liegen die beiden Hauptpunkte 3,'''040 und 3,'''140 entfernt, und daher hat nicht allein die frühere Dekkung seitlicher Objecte aufgehört, sondern auch die Grösse des Bildes eines und desselben Objects auf der Retina wäre verändert und zwar vergrössert. Volkmann hat nun durch Versuche gefunden, dass trotz der verschiedenen Adaptirung zwei Objecte nicht aufhören sich zu decken. Inzwischen scheinen Versuche dieser Art wenig beweisend, weil die Unterschiede, um die es sich hier handelt, erstens unbedeutend sind und dann zweitens durch Versuche mittelst indirecten Sehens nicht ermittelt werden könnten. Wir verweisen wegen der Versuche bei indirectem Sehen auf den folgenden Abschnitt.

Was nun die Verschiebung der Linse betrifft, so kömmt man überein, sie durch den Ciliarkörper bewirken zu lassen. Nach Hueck's Untersuchungen **) hat derselbe mit der Iris einerlei Structur, so dass man die Contractilität, welche der letzteren unzweifelhaft zusteht, auch auf ihn übertragen darf. Die Zusammenziehung des Ciliarkörpers treibt also die Linse nach vorn und

*) A. W. Volkmann: Neue Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes. Leipzig 1836. pag. 179.

**) Am angef. Orte, pag. 104.

soll nach Hueck ausserdem die Convexität der Linse vergrössern. Der Theil der wässrigen Flüssigkeit, welcher durch die Lageveränderung der Linse aus seiner Stelle verdrängt wird, würde von dem vorderen Fontana'schen Kanal aufgenommen werden. Diese Beschreibung des Vorgangs mag dem Physiker genügen; weiteres anatomisches Detail sehe man bei Hueck nach.

Wenn der letztere ausser einer Verschiebung der Linse beim Nahesehen auch noch eine Veränderung ihres Halbmessers für nothwendig erachtet, so bleiben andere Physiologen bei der blossen Verschiebung stehen, z. B. Burow *). Er erklärt die Bewegung der Linse durch die Turgescenz und Entleerung der Gefässe des Ciliarkörpers, und führt zur Unterstützung dieser Ansicht an, dass der Gefässbau in der Iris und dem Ciliarkörper derselbe sei, und für beide gleiche Nerven bestimmt seien.

Verlassen wir das Gebiet des mehr oder weniger hypothetischen, so sehen wir die Adaptirung in einem reellen nahen Zusammenhang mit den Bewegungen der Iris. Die Pupille erweitert sich beim Sehen in die Ferne und zieht sich zusammen beim Sehen in die Nähe, das erstere sogar unter Einwirkung eines starken Lichts, wie Joh. Müller angiebt **), und wonach die obige, gegentheilige Angabe Hueck's zu berichtigen wäre.

Die Physiologen sind über die Art dieses Zusammenhangs zwischen Adaptirung und Weite der Pupille nicht einig. Die einen leiten, wie wir angeführt haben, aus der Bewegung der Iris unmittelbar die Adaptirung her, so dass beide sich wie Grund und Folge verhalten; andere sind dieser Meinung nicht. Joh. Müller macht zu gleicher Zeit auf den Zusammenhang der Adaptirung mit der Bewegung des Augapfels aufmerksam; so wie das Auge nach innen sich bewegt, erweitert sich die Pupille, und es tritt eine Adaptirung für die Nähe ein, und umgekehrt. Es sind somit drei Phänomene, welche zusammenhängen; allein weder dieser berühmte Gelehrte, noch Volkmann sind der Meinung, dass dieser Zusammenhang der Art sei, um behaupten zu können, dass immer, wenn die Pupille sich verändert, auch eine Veränderung in der Adaptirung eintrete. Es wäre für manche Untersuchungen auf diesem Gebiet sehr wünschenswerth, diess bestimmt ver-

---

*) Am angef. Orte, pag. 134.
**) Am angef. Orte, pag. 330.

neinen oder bejahen zu können; wenn man jedoch erwägt, was wir oben über die Deutlichkeit der Bilder in Bezug auf die Adaptirung bemerkt haben, so scheint das eine schwierige Sache. Es ist richtig, dass die Pupille nicht bloss der Adaptirung, sondern auch der jedesmaligen Lichtstärke gehorcht, wiewohl diese letztere Function nicht ihre hauptsächlichste ist; allein es hat seine Schwierigkeit zu ermitteln, ob inmitten der Einwirkung verschiedener Lichtintensitäten die Adaptirung sich ändere oder nicht. Nachdem wir nämlich nun lange über den Act der Adaptirung und seine Nothwendigkeit gesprochen, ist es nöthig, wiederum erinnert zu werden, dass durch diese Thätigkeit keine vollkommenen Bilder hervorgebracht werden, dass man ferner kein ordentliches Maass für die Adaptirung habe, und dass dasselbe sogar, wenn es vorhanden wäre, unter Umständen schwer zu gebrauchen sein würde, wo die Lichtstärke und dadurch die Empfindlichkeit der Retina sich ändert, wo also ein Theil der jedesmal vorhandenen Zerstreuungskreise mehr oder weniger deutlich perzipirt werden wird.

Man sieht aus diesem Abschnitt, dass die Frage wegen Adaptirung, trotz der Aufmerksamkeit, die ihr gewidmet worden ist, noch weit von ihrer Beantwortung entfernt ist.

Ueber die Richtung des Sehens und die Grösse der Bilder auf der Netzhaut.

Die Aufgabe, welche hier zu lösen ist, kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Es soll die Lage eines Strahls angegeben werden, welcher alle Brechungen im Auge erfahren, sich also in dem Glaskörper bewegt, und mit der Axe des Auges denselben Winkel bildet, als vor diesen Brechungen.

Ehe wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, wollen wir zuerst über die in dieser Beziehung angestellten Untersuchungen berichten.

Volkmann, der überhaupt das Verdienst hat, die vorliegenden Fragen der Unbestimmtheit entrissen zu haben, in der sie bis dahin bei allen übrigen Schriftstellern zu liegen pflegten, bezeichnet durch „Sehestrahlen" gerade Linien, gezogen von einem Punkte des Bildes auf der Retina nach dem entsprechenden des

Objects. Wenn das Auge die Gegenstände genau an ihrem Orte sieht, so muss es dieselben in der Richtung dieser geraden Linien empfinden. Volkmann stellt den Satz auf, dass diese letzteren sich sämmtlich in einem und demselben Punkt innerhalb des Auges schneiden, und nennt diesen Punkt den Kreuzungspunkt, auch Drehungspunkt, weil er weiter gefunden hat, dass das Auge bei allen seinen Bewegungen sich um diesem Punkt drehe.

Obgleich, wie Volkmann selbst sagt und wie auch einleuchtend ist, diese Sehestrahlen nur imaginäre Linien sind, so stellt er sich nichts desto weniger die Aufgabe, ihren Durchkreuzungspunkt am lebenden Auge, also durch Messungen ausserhalb des Organs, kennen zu lernen. Er glaubte diess durch ein eigenthümliches Instrument zu erreichen, dem er den Namen Gesichtswinkelmesser giebt, und welches man Tafel I. Fig. 1. abgebildet sieht. Wir theilen die Beschreibung desselben mit den Worten des Erfinders mit, welche zugleich die Vorschrift zum Gebrauch des Instruments enthalten *).

Ein Brettchen A B C D wurde bei A mit einem Ausschnitt versehen, in welchem genau die Nase passte. Dieses Brettchen setzte ich unter dem Auge in horizontaler Lage fest an, liess einen Punkt b bezeichnen, den ich fixirte, und einen Punkt d, welcher durch b verdeckt wurde. Dadurch wurde es möglich, auf dem Instrument eine Linie d b a zu verzeichnen, welche der verlängerten Seheaxe entsprach. Bei b wurde ein Haarvisier angebracht, dessen Entfernung von a 6 Zoll betrug. Bei l war ein Diopter mit einem äusserst feinen Seheloch angebracht. Setzte ich das Seheloch sorgfältig an, so sah das Auge von a aus das Haar des Visieres b, in der Mitte des Diopterlochs l schwebend. Ein zweites Haarvisier war an dem Punkte c befestigt, einen Zoll weit von b entfernt, und mit der Linie a b einen Winkel von 90° bildend. Dieses zweite Visier c stand auf einer festen Scheibe, um welche sich ein Ring ss in horizontaler Richtung drehte. An diesem drehbaren Ring ist ein Diopterlineal r r befestigt, welches bei m einen sehr feinen Diopter trägt. Das drehbare Lineal lässt sich demnach so stellen, dass das Auge von a aus, gleichzeitig das Visier b durch das Diopterloch l und und das Vi-

*) Volkmann: Neue Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes. Leipzig 1836. pag. 31.

sier c durch den Diopter m sieht. Stehen die Haare der Visiere genau in der Mitte der Diopterlöcher, so geben die Visierlinien die Sehestrahlen. Bekannt ist nun der Winkel a b c = 90°, bekannt ist die Entfernung b c = 1 Zoll, und es kommt nur noch darauf an, den Winkel bei c zu kennen. Diesen Winkel misst nun das Diopterlineal auf einer Gradeintheilung u u. Am Lineal selbst ist der Nonius t t angebracht, auf die Weise eingetheilt, dass 10 Abschnitte an ihm 9 halben Graden auf u u entsprechen. Es sind also bei Ausmessung des Winkels b c a Differenzen von 3 Minuten merkbar. Aus dem Gegebenen lässt sich nun die Entfernung des betrachteten Visiers b vom Kreuzungspunkt der Sehestrahlen berechnen, und um die Lage dieses Punktes im Auge zu bestimmen, kam es nur darauf an, die Entfernung des Objects vom vordersten Punkt des Auges, von jener ersten Entfernung zu subtrahiren. Der Abstand des Visiers b vom Auge wurde mittelst eines feinen Maassstabes v erkannt, der zwischen a und l bei v angebracht war. Wenn man nämlich das Instrument mit dem Rande AD, unterhalb des unteren Augenliedes fest andrückt, so schwebt der vorderste Punkt der Hornhaut nicht über dem Punkte a, welcher 6 Zoll von b entfernt ist, sondern über einem Punkt zwischen a und l. Daher wurde bei jedem Versuche ein Assistent so gestellt, dass er, von D aus visierend, bestimmen konnte, über welcher Linie des Maassstabes v der vorderste Punkt der Hornhaut seine Stellung hatte.

Mit Hülfe des gedachten Instruments ergab sich nun die Entfernung des Kreuzungspunktes der Sehestrahlen von dem vordersten Punkte der Hornhaut

in Volkmanns Auge	0,472	Zoll.
im Auge eines erwachsenen Mannes	0,422	-
- - - 14jährigen Mädchens	0,472	-
- - einer erwachsenen Frau	0,522	-
- - eines Mannes	0,422	-
- - - -	0,422	-
- - - -	0,472	-
- - - -	0,522	-
im Mittel	0'',466 = 5''',592	Par.

Da nun der Radius der Cornea 3,39 L. beträgt, so würde dieser Durchkreuzungspunkt 2''',2 hinter dem Centrum der Cornea liegen.

Volkmann endet diesen Abschnitt mit der Behauptuug, dass der Stand des Netzhautbildes durch eine gerade Linie bestimmt werde, die von dem Object durch den gemeinschaftlichen Kreuzungspunkt der Richtungs- und Sehestrahlen auf die Netzhaut gefällt wird. (Volkmann hat die Ansicht von dem Zusammenhalten des Drehungspunktes mit dem Durchkreuzungspunkt der Richtungslinien in neuester Zeit zurückgenommen,*) während der hier folgende Abschnitt bereits vor zwei Jahren geschrieben worden ist. Die Bemerkungen, die ich mir zu machen erlauben werde, treffen also diesen Gelehrten in keiner Art, und ich habe sie nur deshalb nicht unterdrücken mögen, weil dabei einiges zur Sprache kömmt, welches von andern Autoren nicht richtig aus-einander gesetzt worden ist.)

Es kömmt bei diesen Versuchen, wie man sieht, darauf an, die Augenaxe unverrückt in der Richtung l b zu erhalten, und durch ein seitliches indirectes Sehen den Diopter m auf das Haar bei c einzustellen. Scharf wird sich dies nicht bewerkstelligen lassen; denn das indirecte Sehen ist ein sehr undeutliches, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man mittelst desselben eine Schrift zu erkennen versucht, welches mir mindestens ganz unmöglich ist. Ja das eigentlich genaue Sehen, durch welches z. B. ein Diopter scharf eingestellt werden kann, scheint nicht einmal dem gelben Fleck in seiner ganzen Ausdehnung zuzustehen, sondern nur dem Theil desselben, der in der Augenaxe liegt. Denn Burow giebt an,**) dass man die Augenaxe beim Lesen verändern müsse, selbst wenn die Zeile nur 1″,5 lang ist, und ihr Bild die Grösse des gelben Flecks kaum überragt. Bekannt ist es auch, dass die guten Beobachter durch dioptrische Instrumente die Fähigkeit haben, ihr Auge, d. h. die Axe desselben, scharf auf einen bestimmten Punkt des Objects zu richten.

Zugegeben nun, dass in den Versuchen Volkmann's ein indirectes Sehen wirklich stattgefunden habe, so wird der Winkel bei c nicht genau zu bestimmen gewesen sein, und dieser Mangel an Genauigkeit wird, wie man sogleich sieht, da der Winkel bei

---

*) Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. Herausgegeben von Joh. Müller. Jahrgang 1843. Heft 1.

**) Beiträge zur Physiologie und Physik des menschlichen Auges. Königsberg 1841. S. 31.

c einige 80 Grad betragen wird, auf den vorausgesetzten Durchkreuzungspunkt von einem keinesweges zu vernachlässigenden Einfluss sein. Ausserdem hat es Schwierigkeit, den Punkt auf der Eintheilung v anzugeben, über welchem der äusserste Punkt der Cornea sich befindet.

In der Anwendung wird es, glaube ich, den meisten Beobachtern mit diesem Instrument wie mir ergehen; sie werden selbst sehr deutlich fühlen, dass sie den Diopter m c nicht durch indirectes Sehen einstellen, sondern zu dem Ende die Augenaxe geradezu dahin richten. Dies jedoch soll bestimmt nicht der Fall sein, weil, wenn das Auge bei diesen Versuchen gedreht wird, man den Drehungspunkt des Augapfels erhält, aber nicht den Durchkreuzungspunkt der Richtungsstrahlen. Volkmann hat dieser Schwierigkeit beim Gebrauch seines Instrumentes nicht erwähnt, und es bleibt daher fraglich, in wie fern sie bei den Messungen an seinen eigenen und denen anderer Augen berücksichtigt worden ist. Ich muss gestehen, dass es mir mit dem Instrument nicht gelang, weil ich es nicht dahin bringen konnte, b zu fixiren und zugleich den Diopter m ohne Verrücken des Auges einzustellen. Wie gesagt, wenn die Schwierigkeit des Fixirens bei einem Auge nicht überwunden ist, wenn es gedreht wird, so erhält man für dieses Auge nur den Drehungspunkt durch Versuche der beschriebenen Art. Hierzu hat Burow das Instrument auch angewandt,*) und im Mittel aus 40 Versuchen an seinem eigenen Auge gefunden, dass dessen Drehungspunkt

$$5''',42$$

hinter der vordersten Stelle der Cornea liege, welches mit dem obigen von Volkmann gefundenen Mittelwerth gut genug übereinstimmt.

Wenn das Vorangehende Einwendungen gegen die Art der Beobachtung sind, so bleibt nun noch die erheblichste gegen die zu Grunde liegende Voraussetzung. Man habe Fig. 2. die Linien b a, c d in Bezug auf das Auge bestimmt; wodurch könnte es gerechtfertigt werden, wenn diese Linien geradlinig verlängert und also ungebrochen im Innern des Auges fortgesetzt werden, um den Durchschneidungspunkt k zu erlangen? Warum soll γ der Ort sein, wo das Object c sich auf der Retina abbildet? Die Beobachtung hat nichts ergeben, als dass die beiden Punkte c und

*) Am angef. O. pag. 21.

d, oder wenn man will, alle Punkte der Linie c d sich auf einer und derselben Stelle der Retina abbilden, denn ihre Bilder decken sich. Daraus folgt jedoch nicht, dass dies in γ gerade geschehen müsse, welches vielmehr aus theoretischen Gründen sogar unmöglich ist. Man überzeugt sich hiervon freilich am besten durch das Folgende, allein auch schon vorläufig dadurch, dass man statt des complicirteren Auges eine einfache biconvexe Linse sich denkt.

Ganz anders verhält es sich mit Versuchen, welche Volkmann an todten Augen weisser Kaninchen anstellte. Hier war die Lage des Bildes auf der Retina bekannt, und wenn irgend ein Punkt desselben mit dem entsprechenden des Objects verbunden wurde, so erhält man einen Durchkreuzungspunkt, der weder constant sein kann, noch für den vorliegenden Zweck von Erheblichkeit ist.

Wir kehren nunmehr zu der Aufgabe zurück, die zu Anfang dieses Abschnitts gestellt worden ist. In einem früheren Abschnitt „Weg der Lichtstrahlen durchs Auge" wurde ein Lichtstrahl vorausgesetzt, der auf ein System von $i + 1$ Linsen fällt, den Winkel w mit ihrer gemeinschaftlichen Axe macht, und in der $i + 1$ten Linse den Winkel v_i. Ist zugleich n_i der Brechungsindex der $i + 1$ten Linse, so ergab sich nach nach der dortigen Bezeichnung (II)

$$n_i \; v_i = (4i + 1,a) \; w$$

Da man das Auge als aus drei Körpern mit sphärischen Flächen zu betrachten hat, so wird $i = 2$, und folglich

$$n_2 \; v_2 = (9,a) \; w$$

In so fern nun w der Winkel des Strahls mit der Axe vor der Brechung ist, v_2 derselbe nach allen Brechungen, d. h. der Winkel, den der Strahl im Glaskörper mit der Augenaxe bildet, so soll zufolge der Aufgabe $v_2 = w$ sein, welchen Werth auch w habe, vorausgesetzt nur, es sei hinlänglich klein, um für sin. w w schreiben zu dürfen.

Damit diese Bedingung erfüllt werde, muss man haben

$$n_2 = (9,a)$$

und hieraus a bestimmen.

a bedeutet die Entfernung von der ersten brechenden Fläche, wo der ursprüngliche Strahl die Axe trifft, und zwar ist a positiv, wenn diese Entfernung nach Innen liegt.

Setzt man für (9,a) a (9,1) + (9,2), so findet man

$$a = \frac{n_2 - (9,2)}{(9,1)}$$

Wenn man nun den Grössen rechts die in einem früheren Abschnitte ermittelten Werthe beilegt, so findet man

$$a = 3''',1928$$

und dies lehrt, dass wenn ein Strahl so gegen die Augenaxe gerichtet ist, dass er sie in einer Entfernung von 3''',19.. hinter der Cornea träfe, dann wird er in der Glasfeuchtigkeit sich seiner ursprünglichen Richtung parallel bewegen, und zwar welches auch der Winkel sei, unter dem er gegen die Augenaxe geneigt war.

Wir werden diesen Punkt, der 0''',197., also noch nicht $\frac{1}{5}$ Linie vor dem Centrum der Cornea liegt, den ersten optischen Hauptpunkt des Auges nennen. Es giebt einen zweiten, der erhalten wird, wenn man den Punkt sucht, wo der, dem betrachteten, parallele Strahl die Axe trifft oder träfe, wenn man ihn sich bis zur Axe verlängert denkt.

Man hat zufolge der Gleichung (V) des erwähnten Abschnitts

$$\frac{b_2}{n_2} = \frac{(8,a)}{(9,a)},$$

wo b_2 die Entfernung von der letzten brechenden Fläche (hier also der Vorderfläche des Glaskörpers) bedeutet. Da nun der Strahl, für welchen hier b_2 gesucht wird, die Bedingung erfüllt $n_2 = (9,a)$, so findet man

$$b_2 = a\,(8,1) + (8,2)$$

oder

$$b_2 = \frac{n_2\,(8,1) - 1}{(9,1)},$$

in sofern $(9,1)(8,2) - (8,1)(9,2) = -1$, und überhaupt $(n,1)(n-1,2) - (n-1,1)(n,2) = \pm 1$, je nachdem n gerade oder ungerade.

Man findet demnach

$$b_2 = -0''',2946,$$

wo das Zeichen — bedeutet, dass der gesuchte Punkt in entgegengesetzter Richtung, also im Innern der Linse liegt. Da nun die Vorderfläche des Glaskörpers 3''',571 von der Cornea absteht, so liegt der zweite optische Hauptpunkt 3''',276 hinter der Cornea. Wie man sieht, liegen beide Hauptpunkte nur um 0''',083 von einander entfernt, und zwar beide vor dem Mittelpunkt der Hornhautkrümmung, wiewohl sehr wenig davon verschieden.

In dem vorigen Abschnitt ist angeführt worden, dass man den Radius der Hornhaut zu 2''',88.. statt 3''',39 annehmen müsste, wenn die Bilder der Objecte sich auf der Retina darstellen sollten. Für diesen Werth von r würden die beiden Hauptpunkte 2''',835 und 2''',890 von der Cornea entfernt liegen.

Der Nutzen, den die Kenntniss der Lage dieser Hauptpunkte gewährt, ist einleuchtend. Da sie in der Beziehung zu einander stehen, dass wenn ein Lichtstrahl auf einen derselben unter einem gewissen Winkel mit der Axe gerichtet ist, dann der entsprechende Strahl auf den anderen Hauptpunkt unter demselben Winkel geneigt ist, so giebt dies ein Mittel für jedes gegebene Object die Lage des Bildes auf der Retina zu finden. Man ziehe von einem Punkte des Objects eine Linie nach dem ersten Hauptpunkt und eine zweite ihr parallele von dem andern Hauptpunkte, so wird auf letzterer Linie das Object sich abbilden, und zwar kann man in der Wirklichkeit den Durchschnitt dieser Linie mit der Retina für den Ort des Bildes annehmen.

Somit ist die Grösse des Netzhautbildes zu finden. Misst man nemlich den Gesichtswinkel des Gegenstandes am ersten optischen Hauptpunkt, so ist die Grösse seines Bildes = diesem Bogen multiplicirt in 6''',555 d. h. in die Entfernung des zweiten optischen Hauptpunktes von der Nervenhaut (die Axe des Auges von der Cornea bis zur Retina ist dabei zu 9''',831 vorausgesetzt). Nach Volkmann wäre jener Bogen nur mit 4''',239 zu multipliciren; daher sind die nach seiner Angabe berechneten Grössen gegen die unsrigen im Verhältniss von 0,65 zu klein. So z. B. giebt dieser Gelehrte an, dass in einer Entfernung von 11 Zoll zwei Spinnefäden, welche um 0'',0052 von einander abstanden, deutlich als zwei empfunden wurden. Hieraus findet er die Grösse des Netzhautbildes, d. h. die Entfernung der beiden Fäden auf der Retina 0'',00016, während sie nach unserer Rechnung 0'',00025 betragen würde.

Unter dem Gesichtswinkel von 40 Sekunden, den man in der Regel als die Gränze der Unterscheidbarkeit ansieht, ist die Grösse des Netzhautbildes 0'',00011 = $\frac{1}{9440}$ Zoll. Nach E. H. Weber's Messungen der Netzhautkügelchen variirt ihr Durchmesser von $\frac{1}{5000}$ bis $\frac{1}{8400}$ Zoll und einige Physiologen setzen voraus, dass zwischen dem kleinsten noch wahrgenommenen Bilde und der Grösse der Nervenendigung eine Uebereinstimmung

vorhanden sei. Andere jedoch sind dieser Meinung nicht. Es sind ungünstige Umstände, z. B. Lichtmangel oder Mangel an Adaptirung u. s. w., welche einen so grossen Gesichtswinkel von 40″ oder 30″ (wie ihn Tobias Meyer angab) für die Gränze der Wahrnehmbarkeit halten lassen. Jedes nur mittelmässige Auge, sagt Volkmann, erkennt ein menschliches Haar von 0″,002 Durchmesser in 30 Zoll Entfernung. Nach unserer Rechnung entspräche dieser Wahrnehmung ein Gesichtswinkel von 13,6 Sekunden und ein Netzhautbild von 0″,000036. Es wird häufig angeführt, dass ein Schüler des berühmten von Baer ein Haar von $\frac{1}{60}$ Linie Durchmesser in einer Entfernung von 28 Fuss sah, und dieser ausserordentlichen Schärfe entspräche ein Gesichtswinkel von noch nicht einer Sekunde und ein Netzhautbild von nur 0″,0000015.

Will man die kleinsten wahrzunehmenden Bilder mit der Grösse der Nervenendigungen vergleichen, so ist übrigens nicht zu vergessen, dass, nach Burow's Angabe, der gelbe Fleck die Nervenenden kleiner ($\frac{1}{4}$—$\frac{1}{5}$ der Grösse von den Marktkügelchen auf der übrigen Fläche der Retina) und dabei regelmässiger angeordnet zeigt.

Was nun die Richtung des Sehens anbetrifft, so entsteht zuerst die Frage, ob wir überhaupt die Gegenstände ausserhalb der Augenaxe an ihrem wahren Ort sehen? Nach dem, was wir im Obigen über die Undeutlichkeit des seitlichen oder indirecten Sehens anführten, und nach der wahrscheinlichen Vermuthung, dass diese Undeutlichkeit desto bedeutender werde, je grösser der Winkel ist, den die Objecte mit der Axe bilden, lässt sich die angeregte Frage empirisch nicht beantworten. Nur das ist sicher, dass wir selbst von den am meisten seitwärts liegenden Gegenständen ein Bewusstsein ihrer ungefähren Lage jedenfalls haben. Sicher ist es ferner, dass dieses Bewusstsein einem bestimmten, die Retina treffenden Strahl sein Entstehen nicht verdanke, also z. B. nicht dem Strahl, welcher durch den vorausgesetzten Durchkreuzungspunkt oder Drehungspunkt sich bewege, eben so wenig verdanken wir dieses Bewusstsein einem Strahl, welcher etwa auf den zweiten optischen Hauptpunkt gerichtet ist. Die Richtung, in welche wir die deutlich und undeutlich gesehenen Objecte versetzen, hängt allein von dem Ort auf der Retina ab, wo sie sich abbilden. Man kann eine feine Oeffnung

vor dem Auge bewegen, während dasselbe auf einen bestimmten Gegenstand gerichtet ist; trotz der Bewegung, d. h. trotz dem dass nach und nach die einzelnen Strahlen verhindert werden, auf die Retina zu gelangen, sieht das Auge den Gegenstand unverrückt an seinem Orte. Somit kommt es auf einen bestimmten Strahl nicht an. Ist das Auge für den betrachteten Gegenstand nicht adaptirt, oder wegen seines Baues nicht zu adaptiren, dann scheint sich derselbe freilich mit der Oeffnung oder ihr entgegengesetzt zu bewegen, je nachdem er dem Auge zu fern oder zu nahe liegt. Kurzsichtige können sich von dem ersteren, gut gebaute oder weitsichtige Augen sich von dem letzteren leicht überzeugen. Allein selbst die scheinbare Bewegung des Objects in diesem Falle beweist doch im Grunde dasselbe als seine unverrückte Lage bei richtiger Adaptirung. Der einzelne leuchtende Punkt oder erhellte Gegenstand bildet dann nemlich auf der Retina Zerstreuungskreise und die Bewegung der feinen Oeffnung bewirkt nur, dass verschiedene Stellen der Netzhaut das Licht erhalten und den Gegenstand dann nach verschiedener Richtung hin sehen. Somit hängt auch hier wiederum der Ort auf der Retina mit der Richtung des Gesehenen zusammen. Mile hat mit Recht darauf aufmerksam gemacht,*) dass von den seitwärts liegenden Gegenständen sogenannte Richtungsstrahlen — worunter wir hier solche verstehen, welche auf die optischen Hauptpunkte gerichtet sind — gar nicht auf die Retina fallen, da sie von der Iris aufgefangen werden. Setzt man die Entfernung der Pupille von der vorderen Hornhautfläche, und zwar in der Axe gemessen $= 1''',2$, so ist der Mittelpunkt der Pupille $2''',0$.. von dem ersten Hauptpunkt entfernt, und dann werden bei einer Oeffnung der Pupille von $2'''$ nur Richtungsstrahlen von Gegenständen, deren Neigung mit der Augenaxe etwa 27^{0} beträgt, von der Iris nicht aufgehalten und daher zur Retina gelangen.

Zu erklären bleibt also der Zusammenhang zwischen der Richtung, in welche wir die Objecte versetzen und dem Ort der Retina, wo sie sich abbilden. Wenn man die Angabe von Treviranus über den anatomischen Bau der Retina zu Grunde legt, nach welcher die Nervenendigungen diese Haut gewisser-

*) Mile: Ueber die Richtungslinien beim Sehen. Pogg. Annal. Bd. 42 pag. 235.

massen durchbohren, so kann man sich die in Rede stehende Frage vielleicht so beantworten — obgleich ich hinzufügen muss, dass die Angabe von Treviranus bei anderen Gelehrten Zweifel erregt hat. Die Retina ist ein durchsichtiges Gebilde, und es steht der Annahme nichts entgegen, dass wie auch die Wirkung des Lichts auf die Nervensubstanz beschaffen, sie bis in eine gewisse Tiefe dringe und sich bemerkbar mache. Dass nun aber die Nervenendigungen nach der Richtung, in welcher sie gelagert sind, den Eindruck zurückversetzen, ist allen übrigen Erfahrungen entsprechend, und hat in so fern nichts befremdendes. Sind diese Nervenendigungen auf den zweiten optischen Hauptpunkt gerichtet, dann wird das Auge die äusseren Gegenstände in Bezug auf die Winkel, welche sie mit der Axe bilden, richtig beurtheilen, jedoch dieselben nicht genau an der Stelle sehen, wo sie sich befinden, weil die beiden optischen Hauptpunkte um etwa $\frac{1}{10}$ Linie von einander entfernt sind, worüber sich, wie gesagt, durch Beobachtung nicht sicher entscheiden lässt. Auch aus der Krümmung der Retina lässt sich nichts folgern. Treviranus hält diese Messung für schwierig; er fand den Radius der hintern Krümmung des Glaskörpers*) 5''',1; 5''',7; 7,3; Sömmering fand ihn nur 4''',4. Nach Krause **) bildet die hintere Fläche der Retina ein Ellipsoid, dessen halbe grosse Axe an 8 Individuen

5''',12; 5,05; 5,12; 5,07; 5,14; 5,05; 5,05; 4,93

dessen halbe kleine Axe

an 8 Individuen 4,45; 4,15; 4,23; 4,41; 4,58; 4,43; 4,41; 4,19

von ihm gemessen wurde. Der berührende Kreis würde demzufolge einen Radius von 5''',9 haben. Zur Noth könnte also wohl der zweite Hauptpunkt, den wir 6''',5... von der Netzhaut entfernt finden, bei den sonstigen Ungenauigkeiten der Messungen des Auges, für das Centrum der Retinakrümmung gelten. Allein der gelbe Fleck, auf den hierbei die wichtigste Rücksicht zu nehmen ist, scheint seine Krümmung für sich zu haben. Burow fand ihn kegelförmig über die innere Fläche der Retina erhaben, und schätzt die Höhe des Kegels 0''',1; andere Anatomen fanden ihn umgekehrt in der Mitte vertieft.

*) Treviranus: Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Sinneswerkzeuge. Heft I. pag. 23.

**) C. Krause: Ueber die Gestalt des Auges. Pogg. Ann. Bd. 39. p. 532.

Ueber das Schätzen der relativen Entfernung, die Beurtheilung des Reliefs u. s. w. durch das Auge, und über das Stereoscop von Wheatstone.

In einer interessanten Abhandlung hat Wheatstone auf ein Moment beim Sehen mit beiden Augen aufmerksam gemacht, *) das, so nahe es liegt, von keinem Forscher bis jetzt eigentlich bemerkt und noch viel weniger in seinen wichtigen Folgen gewürdigt worden ist. Es ist dies der Umstand, dass ein räumliches Object in beiden Augen ungleiche Bilder entwirft, welche Ungleichheit zunimmt, je mehr die beiden Augenaxen convergiren, je näher das Object also herangerückt wird. Fig. 12. Taf. 1. stellt einen Würfel vor, der sich gerade vor den Augen in einer Entfernung von 7 Zoll ungefähr befindet, und zwar ist a die Zeichnung, welche dem linken, b diejenige, welche dem rechten Auge entspricht. Es hat keine Schwierigkeit, die Art einzusehen, wie solche Bilder nach den Regeln der Perspective zu zeichnen sind; man braucht zu dem Ende nur den gegebenen Gegenstand in einer zweckmässigen Entfernung (6 bis 8 Zoll) und von zweien Standpunkten aus zu entwerfen, welche um den Abstand beider Augen ($2\frac{1}{2}$ Zoll) verschieden sind, während die beiden Projectionsebenen einen Winkel mit einander bilden, der Ergänzung des Neigungswinkels der Sehaxen zu 180° gleichkommend.

Die Thatsache von der Ungleichheit der beiden Bilder eines und desselben räumlichen Objects erkennend, wurde Wheatstone darauf geführt, in dieser Ungleichheit ein Hülfsmittel des Auges bei der Beurtheilung der Räumlichkeit oder des Reliefs zu erkennen. Dieser Hülfsmittel hat das Auge mehrere, die wir nachher besprechen werden; Wheatstone sieht dasjenige, was er so scharfsinnig entdeckt und verfolgt hat, als das hauptsächlichste an, worüber mit einem Entdecker allerdings nicht zu rechten ist. Die Frage ist nur zuerst diese, hat die Ungleichheit der Bilder eines nach 3 Dimensionen sich erstreckenden Körpers wirklich den Nutzen, den Wheatstone behauptet?

---

*) Ch. Weatstone: Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes, philos. transact. Jahrgang 1838. Bd. II. pag. 371. Dieselben deutsch von Dr. A. Franz. Pogg. Annal. Ergänzungsband I. pag. 1. 1839.

Dies zu beweisen, untersucht Wheatstone, welcher Erfolg stattfindet, wenn man den beiden Augen gleichzeitig zwei solcher ungleichen Bilder (jedem Auge das ihm entsprechende) darbietet und den Versuch dabei so einrichtet, dass beide Augen ihr Object nach einem und demselben Ort versetzen. Der Erfolg ist dann in der That der, dass statt der flächenhaften Zeichnung ein körperlicher Gegenstand, also nach 3 Dimensionen sich erstreckend, gesehen wird, und damit ist der fragliche Nutzen dann bewiesen.

Was diese Art von Versuchen betrifft, so ist Folgendes zu bemerken. Bei dem gewöhnlichen Sehen eines einzigen Objects wird dasselbe vom Gesichtssinn nach dem Kreuzungspunkt der beiden Sehaxen versetzt, und das Object bildet sich daher auf gleiche Theile beider Nervenhäute ab. Die letztere Bedingung wird aber auch erfüllt, wenn zwei ganz gleiche Objecte in der Richtung der beiden Sehaxen angebracht werden, also vor oder hinter ihrem Durchkreuzungspunkt. In diesen beiden Fällen wird, wie die Erfahrung lehrt, gleichfalls nur ein einziges Object scheinbar gesehen, und zwar an der Stelle, wo die beiden Sehaxen sich kreuzen. Will man sich hiervon überzeugen, so werden die Augen eine äussere Unterstützung verlangen, damit ihre Axen in einer bestimmten Convergenz verharren, und zu dem Ende verfährt Wheatstone so. Er lässt, wenn die beiden gleichen Objecte vor dem Durchkreuzungspunkte der Sehaxen liegen sollen, die beiden Augen durch zwei bewegliche Röhren sehen, und wenn sie hinter jenem Punkte angebracht sind, so bestimmt er den Punkt, wohin die beiden Axen gerichtet sein sollen, durch eine Nadel, wodurch die beiden Augen hinlänglich fixirt erhalten werden können.

Wenn man jedoch statt der zwei gleichen Objecte die oben besprochenen zwei Perspectiv-Ansichten eines und desselben räumlichen Objects anwendet: dann nimmt der Beobachter auch nur einen Gegenstand aber von drei Dimensionen wahr, d. h. so wie das Object gewesen ist, von dem die Zeichnungen genommen wurden. Und dies ist der für die Ansicht Wheatstone's entscheidende Versuch, in seiner einfachsten, wenn auch nicht vortheilhaftesten Form. Denn da die beiden Augen in keinem der angeführten Fälle für die Objecte oder die Zeichnungen, welche man sie betrachten lässt, genau adaptirt sind, so wird der Gesammteindruck kein deutlicher sein. Inzwischen ist es diesem

Gelehrten gelungen, ein Instrument zu erfinden, das von diesem Uebelstand frei und zugleich in seinem Gebrauch bequem ist, und dem er den Namen Stereoscop beigelegt hat. Fig. 3. Tafel I. giebt eine Ansicht dieses interessanten Instruments von vorn gesehen. $A A_1$ sind zwei ebene Spiegel von ungefähr 4 Quadratzoll, so aufgestellt, dass ihre Seiten einen Winkel von 90° bilden. Wo sich diese beiden Spiegel berühren, befindet sich ein verticales Brett, welches in der Zeichnung weggelassen worden. Es hat den Zweck, die Stirn daran zu legen und so die Augen unmittelbar, jedes vor seinem Spiegel zu fixiren, zu welchem Behuf das Brett Ausschnitte hat. $D D_1$ sind zwei aufrecht stehende Laden, welche, auf zwei gegen einander schiebbaren Brettern $C C_1$ befestigt, in verschiedene Entfernungen von den Spiegeln gebracht werden können. In den meisten Versuchen ist es nöthig, dass jeder Laden in gleicher Entfernung von dem gegenüberstehenden Spiegel sich befinde. Diesen Zweck zu erreichen wird eine rechts und eine links geschnittene Schraube r l angebracht, deren Nutzen klar ist. $E E_1$ sind zwei Schieber, in Falzen der Laden gehend, durch welche die Zeichnungen so lange vor- oder rückwärts bewegt werden, bis ihre reflectirten Bilder mit den Sehaxen zusammenfallen und an scheinbarer Grösse den Zeichnungen entsprechen. Die Bilder werden zwar schon zusammenfallen, wenn die Schieber hin und her bewegt werden, d. h. in sehr verschiedentlichen Stellungen der beiden Zeichnungen. Allein es giebt für diese letzteren nur eine einzige Lage, wo ihre Reflexe als ein einziges Bild von der wahren Grösse ohne Anstrengung der Augen erkannt werden; weil nur in einem einzigen Fall die richtige Grösse beider Netzhautbilder verbunden mit der richtigen Convergenz der Sehaxen und mit der richtigen Accomodation stattfindet.

Wenn man die Zeichnungen anfertigt, so, dass für sie alle eine und dieselbe Neigung der Axen (6 bis 8 Zoll entfernten Kreuzungspunkt) passt, dann kann man das Instrument dadurch vereinfachen, dass man die Schraube r l weglässt, die Laden $D D_1$ also feste Wände sein lässt, welchen man Falze giebt, die Zeichnungen aufzunehmen. In dieser Art besitze ich ein Instrument, welches den gewöhnlichen Zwecken vollkommen gut entspricht und welches aus einem horizontalen 15 Zoll langen Brett besteht, an dessen beiden Enden zwei Bretter mit Falzen versehen senk-

recht aufgesetzt sind. In der Mitte sind die beiden unter 90° verbundenen Spiegel befestigt, welche vor sich eine Querwand mit Ausschnitten für die beiden Augen haben.

Der deutsche Bearbeiter von Wheatstone's Abhandlung, Dr. August Franz, welcher die Erscheinungen des Stereoscops bei Wheatstone selbst gesehen hat, macht über den Gebrauch dieses Instruments einige Anmerkungen, *) welche zuerst zu besprechen sind. Er sagt, dass jeder, der zum ersten Male mit dem Instrument einen Versuch macht, also mit dessen Effect noch nicht bekannt ist, auf die Erscheinung des Reliefs stets aufmerksam gemacht werden müsse, um die einfach gesehene Figur in räumlicher Ausdehnung zu erkennen. Sei man dagegen mit dem Instrument bekannt, so werden diejenigen Figuren, welche häufig im Leben vorkommen und von denen wir durch Erfahrung einen klaren Begriff erworben haben, auf den ersten Blick in Relief gesehen; minder bekannte Figuren bedürften aber auch dann noch einer anhaltenden Betrachtung. Solche Figuren, welche ganz ungewöhnliche fremde Gegenstände darstellen, sollen dem Beobachter momentanen Augen- und Kopfschmerz verursachen, und er erkennt ihre Gestalt im Relief ohne eine gegebene Erklärung und Auseinandersetzung nicht. Dr. Franz sah bei Wheatstone die Zeichnung eines Lichtstrahls, der von drei Glasplatten reflectirt wurde, von denen, wie er angiebt, die erstere sich in einer diagonalen Lage befand und den Strahl nach der zweiten, senkrecht stehenden reflectirte. Durch diese ging er hindurch und fiel auf die dritte, welche dieselbe Stellung als die erste hatte, und den Strahl reflectirte. Es waren schattirte Zeichnungen auf schwarzem Grunde, die dem Dr. Franz wohl aus der Ebene herauszutreten schienen, die er jedoch erst dann als ein vollkommen deutliches Relief und als überraschend naturgetreu erkannte, nachdem er die Bedeutung des Gegenstandes erfahren. Hieraus schliesst derselbe, dass das Sehen eines Gegenstandes im Stereoscop nach seinen drei Dimensionen nur einentheils von den verschiedenen Gesichtseindrücken auf beide Augen, anderntheils jedoch von einer Seelenthätigkeit abhänge.

Allein diesen Angaben kann ich nicht beistimmen. Als ich

---

*) Poggend. Annal. d. Physik u. Chemie. Ergänzungsband. Leipzig 1842. pag. 12.

zum ersten Male ein Stereoscop gebrauchte und Zeichnungen hineinlegte, an deren Effect ich weiter gar nicht gedacht hatte, sah ich allerdings keine Reliefcrscheinung; als ich jedoch unmittelbar darauf eine gewöhnlich von mir gebrauchte Brille nahm, war die Erscheinung vollkommen ausgebildet. Dies Resultat ist einfach dadurch zu erklären, dass ich mit der Brille mehr gewöhnt bin, die Augenaxen auf einen etwas fernen Gegenstand zu fixiren. Eben so ging es mir bei anderen Personen, denen ich das Instrument zeigte; auch sie sahen mitunter das nicht, was gesehen werden sollte; es war aber dann ganz hinreichend, sie nur ruhig in die Spiegel sehen zu lassen; nach sehr kurzer Zeit stellte sich auch bei ihnen der Reliefeindruck her. Dagegen giebt es andere Individuen, denen der Gebrauch des Steoroscops gleich von Anfang überaus leicht wird; selbst bei Kindern von sechs Jahren habe ich das beobachtet. Ich liess sie in das Instrument sehen und merkte aus ihrer Beschreibung deutlich, dass sie den beabsichtigten Eindruck empfingen. Die richtige Convergenz der Sehaxen kann Anfangs den Gebrauch des Instruments erschweren; später fällt diese Schwierigkeit fort und man sieht die Erscheinungen mit der grössten Leichtigkeit. Ich bemerke hierbei, dass wenn irgend ein Beobachter die beiden Zeichnungen nur als eine sieht, daraus noch nicht folge, dass seine Augenaxen sich auf den Bildern kreuzen, und wenn er trotz des Einfachsehens in diesem Falle die Zeichnung nicht nach drei Dimensionen sieht, so lässt sich dies dann so erklären, dass derselbe in der That nur mit einem Auge sehe. Bei Personen mit sehr ungleichen Augen gelingen die Versuche am Stereoscop in der Regel gar nicht, wahrscheinlich deshalb nicht, weil sie zu sehr gewöhnt sind, nach einer bestimmten Entfernung mit nur einem Auge zu sehen.

Was nun die vom Dr. Franz zu Hülfe genommene Thätigkeit der Seele anbetrifft, so glaube ich, dass dieselbe bei den einfachen Erscheinungen des Stereoscops eher nachtheilig wirke, als dass sie fördere. Man gebraucht zu diesen Versuchen am zweckmässigsten nur Contourzeichnungen, ohne Schatten und Farben, um die Erscheinung rein und nicht complicirt zu erhalten. Wheatstone hat auch complicirte Gegenstände, Blumen, Büsten, Crystalle, Vasen, Instrumente u. s. w. in ihren natürlichen Farben für das Stereocop darstellen lassen, was begreiflich mit grosser Sorgfalt geschehen muss, und er fand diese Objecte durch das

Instrument so treu wiedergegeben, dass sie, wie er angiebt, von den reellen nicht zu unterscheiden waren. Bei diesen complicirten Gegenständen steigert das Stereoscop den Eindruck des Reliefs bedeutend; allein der Eindruck ist in der Regel schon bei einer einzigen Zeichnung, wenn auch unvergleichlich schwächer, vorhanden. Bei den einfachen linearen Zeichnungen jedoch schafft das Stereoscop den Eindruck des Reliefs, der ursprünglich nicht vorhanden ist.

Und diese einfachen Figuren haben doch etwas Unnatürliches, wie z. B. der kleinere Kreis vor dem grösseren, von dem in der Wirklichkeit nichts Analoges vorhanden ist. Kömmt hierbei die Seele, oder bestimmter gesagt, das Urtheil des Ichs, in Betracht, dann muss dasselbe eher störend wirken, und wenn die beiden Augen in diesem Falle ein Relief sehen, so kann man nur sagen, dass sie ihren Wahrnehmungen trotz des Einflusses der Seele Geltung zu verschaffen wissen. Welche positive Wichtigkeit soll man auch diesem Urtheile zuschreiben, wenn man im Stereoscop den Kreis betrachtet, durch welchen eine Linie gelegt ist? Die meisten Personen, denen ich die entsprechenden Zeichnungen vorlegte, waren weit entfernt, das zu Grunde liegende Object zu errathen; sie waren also nicht präoccupirt und hatten die Erscheinung trotz dem beim ersten Blick. Sind es hier nicht die Augen, welche, gewissermassen von perspectivischen Angeln geleitet, die dem wissenden Ich nicht zustehen, einen fertigen Eindruck zum Bewusstsein bringen, und sieht man nicht in diesem Falle, wie in vielen anderen, dass bei den Gesichtsvorstellungen die Reflexion im Allgemeinen keine Rolle spiele? Die Wahrnehmungen des Auges gehen vor sich mit ihr, ohne sie, und häufig sogar gegen sie.

Was Dr. Franz über die Schwierigkeit anführt, sehr ungewöhnliche Erscheinungen im Stereoscop richtig zu erkennen, so kann man sich hierüber nicht täuschen; diese Schwierigkeit ist häufig vorhanden, fast jeder neue Gegenstand führt sie herbei. Die Augen werden mehr oder minder unruhig, schweifen von einem Punkte zum andern, bis sie später aus Erfahrung wissen, auf welche Theile sie ihre Aufmerksamkeit hauptsächlich zu richten haben.

An Zeichnungen, welche im Stereoscop zu gebrauchen sind, theilen wir auf der Tafel I. folgende von Wheatstone mit, und

fügen einige neue hinzu. Die Zeichnungen unter a erhält das linke Auge; b ist dann die entsprechende für das rechte.

Fig. 4. stellt sich als eine Linie dar, welche in einer verticalen Ebene geneigt erscheint und zwar so, dass ihr unteres Ende dem Beobachter näher ist. Richtet man die beiden Zeichnungen so ein, dass sie gleichmässig und in entgegengesetztem Sinne um ihren Mittelpunkt gedreht werden können, so bleibt die Linie in derselben verticalen Ebene, nimmt aber verschiedene Neigungen an. Dasselbe sieht man auch schon in dem einen Falle, wo man die Zeichnungen in ihrer Lage lässt, das Instrument jedoch umkehrt, so dass dessen oberer Theil nach unten zu liegen kommt.

Fig. 5. Eine Reihe von Punkten in derselben horizontalen Ebene, jeder von der linken nach der rechten Seite zu dem Beobachter scheinbar etwas näher stehend.

Fig. 6. Eine mit ihrer Convexität dem Beobachter zugewandte krumme Linie.

Fig. 7. Ein Würfel.

Fig. 8. Ein Kegel, dessen Spitze nach dem Beobachter zugewandt ist.

Fig. 9. Der Abschnitt einer vierseitigen Pyramide.

Fig. 10. Zwei Kreise in verschiedener Entfernung von den Augen.

Fig. 11. Eine dreiseitige Pyramide, die Spitze nach dem Beobachter gerichtet.

Fig. 12. Ein Würfel mit Schatten. Der Schatten scheint senkrecht auf der Grundfläche zu stehen und das ihn erzeugende Licht ist so angenommen, dass der Contour des einen Schattens eine Linie mehr hat als der andere.

Verwechselt man die Figuren in der Art, dass man dem rechten Auge die für das linke bestimmte Zeichnung giebt und umgekehrt, dann sieht man wiederum bei den voranstehenden Figuren eine Relieferscheinung; allein diejenigen Theile, welche in der früheren Lage die näheren waren, sind jetzt die entfernteren. Doch ist die Umkehrung in so fern nicht genau, als die näheren Theile jetzt kleiner und die entfernteren grösser erscheinen, als vor der Umkehrung. Bei Fig. 12. ist diese Umkehrung nicht möglich; das Auge geräth über die Lage des Schattens in

Ungewissheit, die sogar eine Art Pein bereitet; er tritt in der Nähe der Figur aus dem Papier hervor, dann aber biegt er sich um, indem die dem Beobachter früher zunächst liegende Ecke des Schattens die entferntere zu werden strebt. Es lässt sich dieses weniger gut beschreiben als sehen, dürfte auch für alle Augen nicht gleich sein.

Wheatstone ist es gelungen, auch das Entgegengesetzte der bisherigen Erscheinungen an seinem Instrument nachzuweisen, nemlich aus einem Körper nach dreien Dimensionen den Eindruck eines blos Flächenhaften zu bilden. Er fertigte ein Paar gleiche Gerippe eines Körpers aus Drath, z. B. zwei Würfel von drei Zoll Seite, und stellte sie vor die beiden Spiegel. Der objective Eindruck war nun verschieden, je nach der relativen Stellung: er war entweder in der That der eines Würfels in Relief, oder bloss eine Contourdarstellung in einer Ebene. Das letztere dann, wenn die beiden Bilder auf der Retina vollkommen gleich waren.

Anmerkung I. Darstellung stereoscopischer Figuren auf photographischem Wege.

Das Verfahren Daguerre's giebt das Mittel die complicirtesten Gegenstände für das Stereoscop gezeichnet, und durch dieselben Effecte zu erhalten, die zu den überraschendsten gehören. Als ich vor einigen Jahren mir dergleichen Bilder anfertigte, war ich doch Anfangs über ihren Effect im Stereoscop ungewiss. Da diese Bilder schon einzeln einen so guten perspectivischen Eindruck machen, so schien mir, dass derselbe hier nicht erheblich gesteigert werden könnte. Allein der erste Versuch hat mich eines Andern belehrt; der perspectivische Eindruck auch des besten Bildes kommt kaum in Betracht gegen denjenigen, welchen zwei entsprechende Bilder im Stereoscop machen, und ich führe dies an, damit man nicht glaube, die einfachsten Figuren seien für die richtige Würdigung des Instruments unerlässlich. Nur müssen die Bilder complicirter Gegenstände mit grosser Sorgfalt aufgenommen worden sein, und ich werde daher die Methode beschreiben, deren ich mich zu diesem Behufe bediene, da sie bequem in der Anwendung ist und jeden gewünschten Grad von Genauigkeit gestattet.

Auf einem hinreichend grossen Brette zeichne man ein gleichschenklichtes Dreieck, dessen Seiten 7 Zoll, dessen Grundlinie $2\frac{1}{2}$ Zoll (der Abstand der beiden Pupillen) ist, und verlängere die beiden Schenkel. Auf die Spitze des Dreiecks lasse man ein Bleiloth an einem Faden herab; der letztere hat die Rolle des Objects zu vertreten. Um nun die beiden Stellungen zu ermitteln, welche der camera obscura gegen das Object zu geben sind, setze ich voraus, dass die camera obscura auf einem Fussgestell mit drei Stellschrauben ruhe, wo nicht, markire man an dem Fussgestell drei Punkte. Auf den einen Schenkel des Dreiecks und zwar in einer Entfernung a von der Spitze des Dreiecks stelle man eine der Stellschrauben, drehe die camera obscura um diese Stellschraube, bis wiederum der Faden des Bleiloths sich in der Mitte des Gesichtsfeldes abbildet, und bezeichne auch hier den Ort der Stellschrauben. Jetzt entfernt man das Bleiloth, bringt das Object an dessen Stelle und schiebt dasselbe hin und her, bis es den gehörigen Ort an der matten Glastafel einnimmt und so scharf als möglich erscheint. Man macht nunmehr die Bilder nach der gewöhnlichen Art. Die Entfernung a ist, wie ich gefunden habe, willkührlich; an eine Entfernung des Objects von 6—8 Zoll hat man sich also durchaus nicht zu halten, ja das Relief des Körpers erscheint sogar bedeutender, je grösser die Entfernung a gewählt wird. Unter solchen Umständen kann man also eine Gegend oder entfernte Gebäude mittelst der camera obscura für das Stereoscop aufnehmen. Ich habe dies mit Gebäuden versucht, welche 2 bis 300 Fuss entfernt waren, und einen Effect erhalten, der sich schwer würde beschreiben lassen, und der sich mit dem gewöhnlichen perspectivischen Eindruck, den gute Bilder dieser Art schon einzeln gewähren, gar nicht vergleichen lässt. Zur Hervorbringung eines so bedeutenden Effects ist es nöthig, die Entfernung des Gebäudes zu ermitteln, um für diese Entfernung die Basis des Dreiecks zu berechnen, an deren beiden Endpunkten die camera obscura aufgestellt werden muss. Nachdem diese gefunden, hat man den Punkt des Gebäudes zu ermitteln, auf welchen die camera obscura zu richten ist, ein Punkt, der dadurch gegeben ist, dass eine Linie von ihm zur camera obscura gezogen mit der Basis einen Winkel von 79° 43′ zu bilden hat. Hier ist also ein Winkelinstrument erforderlich.

Wenn man Bilder solcher Art, unter Glas gesetzt, ins Ste-

reoscop gebracht hat, so kann man sie so wohl bei Tages- als bei Kerzenlicht betrachten. Nur muss man für eine gleichmässige Beleuchtung beider Bilder sorgen, sich bei Anwendung von Tageslicht mit dem Rücken gegen ein Fenster stellen, bei Anwendung von Kerzen zwei derselben nehmen.

Für solche Versuche ist es wünschenswerth, den Bildern auf der Silberplatte den möglichsten Grad von Stärke zu geben, so dass die hellen und die dunklen Partieen sich möglichst unterscheiden. Dies hängt von folgenden Momenten ab: 1) von der Natur des Silbers; nicht jedes Silber giebt hinreichend starke Bilder, mindestens anfangs nicht. Solche Platten pflegen bei zweckmässigem Gebrauch mit der Zeit besser zu werden, und um sich diesen Vortheil gleich anfangs zu verschaffen, polire man die Platte, lasse sie stark jodiren und wiederhole dies einige Male.

2) von der Geschicklichkeit, die man im Poliren der Platte hat; nur die sehr gut polirte und vollkommen reine Platte giebt starke Bilder. Das Poliren der Platten ist eine Geschicklichkeit der Hand, die man, wie alle dergleichen Fertigkeiten, nur durch Uebung sich zu eigen machen kann. Man lasse sich dabei durch die marktschreierischen Anpreisungen von neuen Methoden nicht irre machen; es kömmt weniger auf die Methoden als auf die Geschicklichkeit an. Sonst ist es freilich hierin so weit gekommen, dass Viele, denen ein Bild gelungen oder nur nicht ganz misslungen ist, uns mit der Methode der Anfertigung desselben sofort beschenken. Sehr erleichtert wird das Poliren durch die zweckmässige Wahl des Putzmittels. Dasselbe hat mehreren Bedingungen zu genügen, und ich habe, nachdem ich den grössten Theil der üblichen Pulver versucht, nur eines gefunden, welches allen Anforderungen entspricht, und das ich Experimentatoren dringend empfehle. Es ist ein graues Pulver, welches im Handel unter dem Namen Marmorerde, Silberputzerde, auch Trippel vorkömmt, und grösstentheils aus kohlensaurem Kalk mit etwas Kieselerde und Eisenoxyd besteht. Durch die gewöhnliche Kreide, so fein bereitet, als man wolle, kann dieses Polirmittel nicht ersetzt werden; sie adhärirt zu stark an dem Silber, was das genannte Pulver nicht thut. Auch beim Poliren von Gold, Kupfer, Messing, Neusilber u. s. w. wird es mit gleichem Erfolg angewandt.

3) hängt die Stärke des Bildes von der richtigen Bestimmung der Zeit in der camera obscura ab. Das Jodsilber erhält durch

das Licht die Eigenschaft, den Quecksilberdampf zu condensiren und adhäriren zu machen, anfangs in zunehmendem Grade. Wirkt das Licht länger, so nimmt es dem Jodsilber nach und nach diese Eigenschaft, und zugleich hat nun der Quecksilberdampf die Kraft das Jodsilber zu schwärzen. Da geschwärztes Jodsilber vom unterschwefligtsaurem Natron oder Kochsalz nicht auflösbar ist, so wird das Bild dann aus doppeltem Grunde schwächer.

4) hängt die Menge des niedergeschlagenen Quecksilberdampfes auch von der Zeit ab, welche die Platte im Quecksilberapparat verweilt. Die gewöhnliche Vorschrift über die Erhitzung des Quecksilbers ist nur eine ungefähre, und man muss durch Uebung beurtheilen lernen, ob es dem Bilde förderlich sein wird, wenn es noch weiter den Quecksilberdämpfen ausgesetzt bleibt. Zu dem Ende nehme man die Platte heraus und betrachte ihr Bild, was im hintern Theile einer Stube ohne Nachtheil geschieht, selbst wenn man Jodchlorür oder Brom angewandt hat. Will man die Platte nicht aus dem Quecksilberkasten nehmen, so muss man dem letztern eine andere Einrichtung als gewöhnlich geben. Man richte nemlich den Apparat so ein, dass die Silberplatte senkrecht stehe und vor ihr eine Glastafel. So kann man die Entwicklung des Bildes bei Kerzenlicht gut beobachten und sich zu beurtheilen gewöhnen, wann die Platte herauszunehmen ist. Die gebräuchlichen Apparate, in welchen die Silberplatte unter 45° gegen den Horizont geneigt ist, taugen hierzu nicht.

Nach dieser Abschweifung kehre ich zu Wheatstone's Entdeckung zurück. Liest man seine Darstellung derselben, so wäre zu bemerken, dass er den Nutzen der ungleichen Bilder vielleicht etwas zu hoch stelle, in so fern er dieses Moment für das hauptsächlichste hält, dessen das Gesichtsorgan sich bedient, das Relief der äusseren Objecte zu beurtheilen. Dass dieser Nutzen jedoch stattfinde, hat er auf eine, dem wahren Experimentator so geziemende Art nachgewiesen, dass uns hierüber kein Zweifel möglich scheint. Einwendungen, welche Dr. E. Bruecke *) durch Aufstellen einer andern Ansicht dagegen erhoben hat, werde ich im Folgenden, so viel ich vermag, zu beleuchten versuchen. Nach der Ansicht Bruecke's entsteht der Eindruck des Reliefs davon,

*) J. Müller, Archiv für Anatomie, Physiologie u. wissenschaftliche Medizin. Berlin. Jahrg. 1841. p. 459.

1) dass der Gesichtseindruck, der uns von einem ausgedehnten Gegenstand zukömmt, kein momentaner sei, sondern das Aggregat vieler, welche nach und nach von den verschiedenen Theilen erregt werden; 2) dass wenn ein nach dreien Dimensionen ausgedehnter Gegenstand betrachtet wird, die Convergenz der Sehaxen für dessen verschiedene Punkte sich ändert, und in einem beständigen Schwanken zwischen dem nächsten und entferntesten Punkte bleibe.

Es ist sehr wohl möglich, dass die verschiedene Convergenz der Sehaxen bei der Beurtheilung des Reliefs eine Rolle spiele; ob man jedoch mittelst derselben die Erscheinungen am Stereoscop erklären könne, ist eine andere Frage. Ich muss gestehen, dass mir dies nicht einleuchten will. Man kann freilich den Satz zu Hülfe nehmen, dass beim Sehen mit beiden Augen das Object dahin versetzt wird, wo die Sehaxen sich kreuzen. Man denke sich also einen Punkt, der im Stereoscop vor der Bildfläche zu schweben scheint, so muss er allerdings auf beiden Bildern so entworfen sein, dass wenn beide Augen ihn im Stereoscop betrachten, ihre Axen sich vor der Bildfläche schneiden. Allein hieraus folgt doch die Bedingung nicht, nach welchen Zeichnungen für dieses Instrument anzufertigen sind. Es würde hieraus vielmehr folgen, dass man diese Art Zeichnungen ohne alle Rücksicht auf die perspectivische Bedingung entwerfen könnte, und dass man demungeachtet im Stereoscop die Relieferscheinung irgend eines verzerrten Körpers sehen würde.

Die Erfahrung ist dem geradezu widersprechend. Sind die Zeichnungen nicht nach Wheatstone's Bedingung entworfen, so sieht man keine Relieferscheinung, sondern bald die eine, bald die andere derselben. Sind die Zeichnungen nur an einer gewissen Stelle unrichtig, so entsteht bei der Betrachtung dieser Stelle eine gewisse Unruhe, indem auch hier bald die eine bald die andere Zeichnung gesehen wird. Wenn das Durchkreuzen der Sehaxen das Bedingende bei den Erscheinungen des Stereoscops wäre, so sollte der Gegenstand an einer so falsch gezeichneten Stelle nur verzerrt erscheinen. Hätte man sich das Object an dieser Stelle verzerrt gedacht und die beiden Zeichnungen demgemäss richtig entworfen, so ist kein Zweifel, dass die beiden Augen im Stereoscop das sehen würden, was man beabsichtigte. Sie würden

dabei nicht in Unruhe gerathen sein, woraus dann folgt, dass die Verzerrung an sich den Augen noch kein Hinderniss darbietet.

Wenn die verschiedentliche Convergenz der Sehaxen das hauptsächlichste Moment zur Beurtheilung des Reliefs ist, so müsste folgender Versuch gelingen. Man zeichne zwei concentrische Kreise von sehr verschiedenen Radien und betrachte diese Zeichnung mit beiden Augen; es müsste der kleinere Kreis vor dem grösseren zu schweben scheinen, und überhaupt müsste die Ebene des Papiers gewölbt erscheinen. Nichts der Art findet bekanntlich statt, und somit zeigt sich in diesem und vielen anderen, leicht zu erdenkenden Fällen, die Veränderung der Convergenz der Sehaxen gerade nicht als ein sehr erhebliches Moment bei der Beurtheilung des Reliefs, obgleich es nicht ganz in Abrede gestellt werden soll.

Die Beurtheilung des Reliefs und das Schätzen der Entfernungen der Objecte sind zwei Thätigkeiten des Gesichtsorgans, die nicht nahe verwandt, sondern die vollkommen identisch sind. Wenn man das Relief eines Würfels erkennt, so geschieht dies nur so, dass man urtheilt, die eine Ecke, Kante, befinde sich vor oder hinter der andern; man schätzt also die relative Entfernung. Diese Art Schätzung besitzt das Gesichtsorgan in grosser Vollkommenheit, und auch nur diese Art Schätzung; es ist fähig, uns erkennen zu lassen, dass der eine Gegenstand näher als der andere sei. Anzugeben jedoch, wieviel die Differenz beider Entfernungen in irgend einer willkührlichen Einheit ausgedrückt betrage, hierzu hat es in sich selbst die Fähigkeit gar nicht, leistet hierin auch nur wenig und dann auch nur durch lange Uebung und mittelst ganz äusserlicher Hülfsmittel. Man darf also die eine Schätzung mit der andern nicht verwechseln, und aus der Unbehülflichkeit des Auges in Bezug auf die absolute Entfernung keinen Beweis gegen seine grosse Fertigkeit bei der Schätzung der relativen anführen. Man sage auch nicht, dass es diese letztere Fertigkeit durch Gewohnheit und Uebung erst erlange, dass das Kind nach dem Monde greife; denn hiermit würde wiederum das Beurtheilen der relativen und absoluten Entfernung verwechselt worden sein. Es ist wohl denkbar, dass das Auge auch in derjenigen Thätigkeit, die ihm von Natur zukömmt, durch Uebung unterstützt werde; allein diese Uebung ist dann anderer Art, als man sie sich mitunter denkt. Es ist eine Uebung, die das Auge

dann in sich gewinnt, und von welcher das wahrnehmende Ich nichts erfährt. Diesem wahrnehmenden Ich liefert das Gesichtsorgan einen fertigen Eindruck, worin auch die relativen Entfernungen bestimmt sind, und dabei ist es oft sehr gleichgültig, was das wahrnehmende Ich anderweitig von dem gesehenen Objecte wisse. Man kann dieses factische Verhältniss, welches sicherlich auch bei den übrigen Sinnen stattfindet, unmöglich ignoriren, ohne zu gänzlich falschen Vorstellungen über den Standpunkt der Sinneswerkzeuge in Bezug auf das Ich, welches percipirt, zu gelangen. Das Stereoscop Wheatstone's, indem es uns eine Fähigkeit des Gesichtsorgans offenbart, welche wir anwandten, ohne je etwas von ihr zu wissen, führt sehr natürlich auf Ueberlegungen solcher Art, die jedoch hier nicht weiter am Orte sind. Ich kehre zu der Schätzung der relativen Entfernung durch das Auge zurück.

Wir kennen nunmehr drei Bedingungen, durch welche sowohl das Relief als die relative Entfernung vom Auge beurtheilt wird: die Vertheilung von Licht und Schatten und die sogenannte Luftperspective, durch welche die Malerei ihre Täuschungen hervorbringt; die Convergenz der Sehaxen und endlich die Ungleichheit der Bilder in beiden Augen. Zwei von diesen Bedingungen setzen die Thätigkeit beider Augen voraus; nur die erste der angeführten, die Vertheilung von Licht und Schatten und die Abnahme der Tinten würde es auch schon dem einen Auge möglich machen, die Entfernungen und das Relief zu beurtheilen.

Allein diese Bedingung ist nicht ausreichend, die Aufgabe zu lösen, zu der wir uns jetzt wenden, nemlich die Frage, auf welche Weise nur ein Auge das Relief zu schätzen im Stande sei? Es ist hierin sehr sicher, und wenn auch nicht in demselben Grade wie beide Augen, wenn sie zusammenwirken, so braucht man doch nur die Aussenwelt mit einem Auge zu betrachten, um sich zu überzeugen, dass ihm die Beurtheilung in Bezug auf den fraglichen Punkt in beträchtlichem Grade zusteht. Wheatstone schlägt diese Fähigkeit des einen Auges zu gering an, und führt mehreres an, woraus dessen grosse Unsicherheit bei der Beurtheilung folgen soll.

Wir werden gleich nachher auf Erscheinungen aufmerksam machen, welche die Behauptung Wheatstone's als nicht richtig darstellen und doch auch durch die Vertheilung von Licht und

Schatten nicht erklärt werden können; inzwischen wird es bei der Wichtigkeit der Sache doch auch gut sein, die Beweise dieses Forschers zu erwägen. Er wendet sich zu dem Behufe an die bekannte Erfahrung Gmelin's, dass vertieft geschnittene Steine durch Mikroscope, Loupen u. s. w. betrachtet, erhaben erscheinen, und weist die gewöhnliche Erklärung zurück, dass dies durch die Umkehrung von Licht und Schatten bewirkt werde. Denn diese Erklärung würde nur für das zusammengesetzte Mikroscop gelten, welches die Objecte umgekehrt darstellt; allein weder für die einfachen Loupen, noch für den Fall, wo man den Stein bloss durch eine Röhre betrachtet, und ihn gleichfalls erhaben sieht, wenn er in der Wirklichkeit vertieft ist. Wheatstone erklärt diese sonderbaren Erscheinungen so, dass er behauptet, dem einen Auge fehle die zuverlässige Richtschnur, nemlich die Darstellung verschiedener Bilder auf jeder Retina; die Einbildungskraft trete nun hinzu, und lasse das Object bald erhöht, bald vertieft erscheinen, so wie sie es uns gerade vorstellt. Es ist richtig, dass bei dieser Art von Versuchen das Object bald im Relief, bald in der Vertiefung erscheint, der geschnittene Stein also bald als Gemme, bald als Camee dem einen Individuum vorzugsweise so, dem anderen entgegengesetzt sich darstellt — wer den Versuch Vielen gezeigt hat, wird das hinlänglich wissen. Allein Wheatstone hat Unrecht, wenn er von einer Unbestimmtheit des Auges spricht, die so gross sein soll, dass ein, im Allgemeinen bei den Gesichtseindrücken so unbedeutendes Moment, wie die Einbildungskraft oder die Reflexion von einem determinirenden Einfluss werden soll. Es wäre ausserdem wunderbar, bei einem und demselben Individuum oft in sehr kurzer Zeit die Erscheinung sich umkehren zu sehen. Was nemlich die Unbestimmtheit anbetrifft, so kann man sie aufheben, wenn man für ein gehöriges Licht und Schatten sorgt; das Auge hat dann einen unbestreitbar sicheren Anhalt, und man sieht dann gar keinen Grund ab, warum der Stein nicht richtig soll gesehen werden können, welches trotz dem nicht die Regel ist. Will man nun vollends die Thätigkeit der Sinne in Anspruch nehmen, so ist wiederum nicht abzusehen, warum diese Thätigkeit in den häufigsten Fällen das Object falsch beurtheilt. Licht und Schatten sollten zu der richtigen Vorstellung führen; das Object ist im Allgemeinen anderweitig bekannt, und nichts desto weniger stellt

es sich falsch dar. Somit kann auf diese Weise das Experiment nicht erklärt werden, dass ein vertieft geschnittener Stein durch eine Loupe oder eine Röhre betrachtet, erhaben erscheint. Und nun muss ich zu diesen Versuchen hinzufügen, dass man erstens der Röhre nicht bedarf, ja dass man den Stein frei mit einem Auge betrachten kann, ja, was das Merkwürdigste ist, dass man ihn mit beiden Augen betrachten kann, und doch erscheint er sehr häufig umgekehrt, als er in der Wirklichkeit ist.

Die Erklärung dieser interessanten Erscheinungen kann man nicht aus einem einzigen Princip ableiten; sie gehören zum Theil zu denjenigen, welche man bei stereometrischen Figuren beobachtet, die bei anhaltender Betrachtung sich auf eine sonderbare Weise umkehren, was ich in einem eigenen Abschnitt erklären werde. Hier habe ich vorläufig nur zu bemerken, dass das Auge sehr gewöhnt ist, die hellen Gegenstände, oder die hellen Theile eines und desselben Gegenstandes für näher als die übrigen zu halten, wie das durch die Malerei, selbst bei fehlerhafter oder mangelnder perspectivischer Zeichnung, hinlänglich bewiesen wird. Wenn nun z. B. bei einem tief geschnittenen Stein das Licht in die am meisten vertieften Stellen fällt, so werden dieselben dem Auge näher erscheinen und der Stein also erhaben geschnitten, und da dasselbe sogar eintritt, wie wir angegeben haben, wenn mit beiden Augen gesehen wird, so ist es klar, dass die von Wheatstone hervorgehobene Ungleichheit der Bilder eines und desselben Objects hierbei sich gegen die Verhältnisse von Licht und Schatten nicht geltend zu machen die Kraft hat und ihnen also an Wirkung nachsteht.

Dasselbe kann man auch in folgendem Versuch sehen. Man nehme die Zeichnungen Fig. 12, bringe sie ins Stereoscop und verwechsele die Zeichnungen, indem man dem rechten Auge die für das linke entworfene giebt; man sieht nunmehr keinen Würfel mehr, sondern einen durch den Durchschnitt dreier Ebenen hervorgebrachten körperlichen Winkel. Legt man jedoch den Schatten und die entsprechende Seite der Figur dunkler an, dann ist diese Veränderung weniger leicht; man erhält dann auch wohl den körperlichen Winkel, allein eben so häufig den Eindruck eines prismatischen Körpers, namentlich wenn der Schatten betrachtet wird.

Nach dem Vorhergehenden hat Wheatstone also Unrecht,

wenn er den Gesichtseindruck da für unbestimmt und den Launen der Einbildungskraft für preisgegeben hält, wo ihm durch ungleiche Bilder in seinen beiden Organen ein Anhaltspunkt fehlt. Da, wo diese Ungleichheit nicht möglich ist, wie z. B. bei Gemälden, soll es nach ihm den Effect erhöhen, wenn man lieber nur ein Auge anwendet. Allerdings betrachten wir Gemälde am besten nur mit einem Auge, aber dann durch eine geschwärzte Röhre, und in dieser letzteren besteht der Nutzen, den wir von dieser Art der Betrachtung ziehen und der auch nicht schwer einzusehen ist. Die Gemälde sind in der Regel für einen sehr entfernten Augenpunkt berechnet, und da nun die Augen in der Schätzung der relativen Entfernung sehr sicher sind, so würde es sie darin stören, wenn sie vor oder neben dem Bilde Objecte in grosser Nähe wahrnähmen. Ausserdem gewinnt jeder Gegenstand an Deutlichkeit, wenn man seitliches Licht entfernt hält.

Die einzige oder doch hauptsächlichste Erklärung, welche Wheatstone für das Erkennen des Reliefs bei Einäugigen giebt, ferner bei solchen Personen, welche auf einem Auge erblindet sind, oder nur mit einem Auge sehen, ist die, dass in solchem Falle der Kopf bewegt wird, und somit das Auge von einem nach drei Dimensionen ausgedehnten Gegenstand verschiedenartige Bilder erhält, die es dann zu dem Eindruck des Reliefs combinirt. Es ist mit diesem Hülfsmittel, wie mit dem vom Licht und Schatten; sie sind richtig, werden angewandt, allein sie erschöpfen die Frage nicht. Es bleibt immer noch unerklärlich, wie ein gleichmässig beleuchtetes Stück Papier, welches abwärts vom Auge gehalten wird, während das andere geschlossen ist, beim ersten Blick in seiner wahren Richtung gesehen wird. Man kann hierbei nicht sagen, dass dies durch die Schätzung des Gesichtswinkels, oder richtiger gesagt, durch die Beurtheilung der Grösse der Netzhautbilder bewirkt werde; denn wir denken uns das Papier nicht parallel, sondern beliebig geschnitten, so dass möglicherweise der Gesichtswinkel von der entfernteren Seite sogar grösser sei, als derjenige von der zunächst liegenden. Ueberhaupt kann man dem Gesichtswinkel in Bezug auf die Fähigkeit des Auges, die Entfernungen relativ zu schätzen, nur eine Wichtigkeit zweiten Ranges zuschreiben, insofern seine Hülfe nur dann dem Auge nützen kann, wenn es mit der Gestalt des zu beurtheilenden Gegenstandes schon anderweitig ungefähr bekannt ist.

Die eigentliche Art, auf welche ein Auge für sich allein die relative Entfernung der äusseren Gegenstände beurtheilt, besteht darin, dass es sich adaptirt und ein Bewusstsein über die Adaptirung in sich trägt. Man muss ihm hierin, wie sich ergeben wird, ein sehr vollkommnes Gefühl zuschreiben und zugleich den Begriff der Adaptirung in einem weitern Sinne nehmen, als gewöhnlich geschieht; man wird nemlich diese Thätigkeit auch für solche Entfernungen zugeben müssen, wo sie, bei dem Bau des Auges, nicht mehr im Stande ist, Bilder von einer hinlänglich grossen Deutlichkeit hervorzubringen, also die Gränzen überschreitend, die wir in einem früheren Abschnitt für das Intervall der Adaptirung aufstellten.

Diese Ansicht ist so einfach und naturgemäss, dass man sich billig wundern muss, bei keinem Autor die zum Theil wichtigen Folgerungen angegeben zu finden, die daraus abgeleitet werden können. Um diese Ansicht zu beweisen, ist es nöthig, das Experiment so einzurichten, dass einzelne Punkte eines planen Gegenstandes über oder unter der gemeinschaftlichen Ebene zu liegen kommen und sich zu überzeugen, dass ein einziges Auge ausreiche, diese scheinbar veränderten Orte richtig zu schätzen. Dies kann durch Brechung leicht erreicht werden, und so wird man unter den folgenden Thatsachen einige sehr bekannte Erscheinungen und andere nicht beachtete finden, welche nur durch die mitgetheilte Theorie erklärt werden können.

Bekanntlich erscheint der Boden eines Gefässes, worin eine Flüssigkeit, wie gehoben und gekrümmt, und ein Stab im Wasser gebrochen. Diese Erscheinungen sind uralt, sogar in unsern Lehrbüchern; auch pflegt die letztere derselben die Lehre von der Refraction zu eröffnen. Inzwischen so alt sie sei, so hat kein einziges der mir bekannten Werke diese Erscheinungen hinlänglich erklärt. Allerdings lässt man die Lichtstrahlen, sobald sie das Wasser verlassen, eine Ablenkung erleiden; daraus jedoch folgt die Erscheinung noch nicht, die das Auge wahrnimmt. Was folgt in der That aus einem abgelenkten Strahl in Bezug auf den Ort, wo das Auge den leuchtenden Punkt hinversetzt, da ein Strahl ja nur eine Richtung bestimmt? Wenn das Auge sich über dem Grunde eines Gefässes befindet, so erhält es Strahlen von jedem Punkte desselben, das Gefäss mag leer oder mit einer brechenden Substanz angefüllt sein, und die gekrümmte Erscheinung des

Grundes bleibt folglich unerklärt. Nach dem, was wir so eben über die Fähigkeit des Auges behaupteten, den relativen Ort der Gegenstände durch die Adaptirung zu schätzen, ist sie dagegen sogleich erklärt.

Es sei r die Höhe einer Flüssigkeit; man nehme einen Strahl, welcher unter dem Winkel φ mit der Normale durch die Flüssigkeit sich bewegt, und unter dem Winkel φ_1 in die Luft gebrochen werde. Es sei x die Höhe, in welcher der Strahl bis zur Normalen fortgesetzt, dieselbe treffe, so findet man leicht

$$x = r\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}\right)$$

wo n der Brechungsindex der Flüssigkeit ist.

Ist der Winkel φ unendlich klein, so kann man für $\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}$ 1 setzen, und alle unter dieser Bedingung von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen werden sich dann in einem und demselben Punkt der Normale schneiden, d. h. jener leuchtende Punkt wird einem Auge, welches sich über ihm befindet, um $r\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ gehoben zu sein scheinen, welches der Erfahrung gemäss ist. Uns interessirt hier dieser Fall bloss in so fern, als daraus klar hervorgeht, dass das Auge durch die Adaptirung in den Stand gesetzt ist, den relativen Ort zu bestimmen, und es ist nur noch anzuführen, dass wenn der Winkel φ einen endlichen Werth hat, man für die Höhe, in welcher die unter einem unendlich wenig davon verschiedenen Winkel ausfahrenden Strahlen eines und desselben leuchtenden Punktes sich schneiden, findet:

$$x = r\left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos^3\varphi_1}{\cos^3\varphi}\right)$$

Anmerkung. Der Gleichung $x = r\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ bedient man sich bekanntlich, um den Brechungsindex n für Flüssigkeiten oder für andere durchsichtige Substanzen mit parallelen Oberflächen zu ermitteln, falls genauere Bestimmungen für die einzelnen Farben mittelst der festen Linien des Spectrums nicht möglich sind. Nachdem r gemessen, findet man x als die Grösse, um welche ein Mikroscop verschoben werden muss, wenn es einen bestimmten Punkt in seiner Axe einmal direct und dann durch die Substanz hindurch deutlich erscheinen lässt. Diesem oder jenem Le-

ser, welcher dergleichen Untersuchungen anstellen wollte, dürfte das Verfahren, das dabei eingeschlagen werden muss, wenn man übereinstimmende Werthe erhalten will, erwünscht sein. Die gewöhnlichen Mikroscope sind hierzu nicht tauglich und ich habe mich vergebens bemüht, mittelst ihrer zu einiger Genauigkeit zu gelangen. Haben sie nemlich eine starke Vergrösserung, so verlangen sie, dass das Object dem Objectiv sehr nahe gerückt werde, wodurch man den Vortheil verliert, die zu untersuchende Substanz in gehöriger Dicke anwenden zu können. Haben sie dagegen eine schwache Vergrösserung, wie die zum Ablesen gebräuchlichen Mikroscope, dann ist es unmöglich, sie genau einzustellen; man bleibt innerhalb eines ziemlich beträchtlichen Intervalls vollkommen unsicher. Auch das Verfahren, das Mikroscop mit einem Fadenkreuz versehen, auf einen Theilstrich einzustellen, und durch die Bewegung des Kopfes zu beurtheilen, ob das Bild desselben genau an der Stelle des Fadens sich befinde, hebt die Unsicherheit nach meinen Versuchen keinesweges. Diesen Uebelständen zu entgehen, verfuhr ich so, dass ich das Objectiv eines gewöhnlichen Ablese-Mikroscops an das eine Ende einer 14 Zoll und längeren Röhre anbrachte, den Oculareinsatz an das andere Ende. Hierdurch erhielt ich eine starke Vergrösserung. Nennt man nemlich p und p_1 die Brennweite der Objectiv- und Ocularlinse, d die willkührliche Entfernung der beider Gläser, so ist die Vergrösserung durch das Instrument proportional $\frac{d-(p+p_1)}{p\,p_1}$ und wächst also mit d.

Bei den angewandten langen Röhren war es möglich, das Brechungsverhältniss von Substanzen zu bestimmen, deren Dicke 1 Zoll und mehr betrug, und zugleich liess die Empfindlichkeit des Einstellens nichts zu wünschen übrig. Es ist kein Zweifel, dass durch noch längere Röhren, wenn man für die gehörige Beleuchtung sorgt, fast jeder beliebige Grad von Genauigkeit bei diesen Versuchen zu erreichen sein wird. Der grössere Grad von Empfindlichkeit beim Einstellen rührt daher, weil die Entfernung des Objects von einer Linse mit a, diejenige des Bildes mit α bezeichnet, $d\alpha = -\frac{\alpha^2}{a^2}\,da$ ist, und weil folglich, bei einer und derselben Linse, die Veränderung in der Entfernung des Bildes desto

bedeutender wird, je grösser diese Entfernung, je näher also dem Brennpunkt das Object rückt.

Derselben Vorrichtung habe ich mich mit grossem Vortheile bedient, die Achromasie von Objectivlinsen, namentlich der zu den Mikroscopen bestimmten, zu untersuchen. Als Object wende ich den Quecksilberfaden in einer Capillarröhre an, und sehe dann, bei nicht vollkommener Achromasie, das vom Quecksilber reflectirte Tages- oder Kerzenlicht mit breiten Farbenrändern, deren Breite davon herrührt, dass die Abweichung wegen der Farbe dem Quadrat der Entfernung des Bildes direct proportional ist.

Indem ich zu dem Schätzen der relativen Entfernung mittelst eines einzigen Auges zurückkehre, bemerke ich, dass die Erscheinung des gebrochenen Stabes auch durch ein Glasprisma hervorgebracht werden könne, welches man über eine auf Papier gezogene Linie legt. Sie erscheint gebrochen und hebt sich, und zwar um so mehr, je dicker die Glasschicht ist, durch welche ihre Strahlen sich bewegen, wie das aus dem obigen Werth von x schon zu ersehen ist.

Sehr gut stellt auch der Kalkspath Erscheinungen dieser Art dar. Da die beiden Strahlen, in welche er das Licht theilt, im Allgemeinen verschiedene Gesetze der Brechung befolgen, so erscheinen die beiden Bilder dem Auge nicht in gleicher Entfernung. Legt man z. B. ein natürliches Stück dieses Crystalls auf einen schwarzen Punkt, so erscheint der gewöhnlich gesehene höher als der ungewöhnliche und die Differenz wächst mit der Dicke des Crystalls. Ich wiederhole, dass alle diese Erscheinungen allerdings von der Brechung, die das Licht erfasst, abhängen, und dass man sie also als Beweise für diesen Prozess aufstellen, dass man sie aber nicht erklären kann, wenn man nicht die Adaptirung des Auges und das Bewusstsein, welches dasselbe über diese Thätigkeit hat, zu Hülfe nimmt — zu Anfang eines Tractats über die Refraction gehören sie also gar nicht hin.

In den angeführten Fällen löst ein Auge für sich allein schon die Aufgabe; allein die Sicherheit wächst, wie das begreiflich ist, bei Anwendung beider Augen, wovon man sich bei feineren Unterschieden überzeugen wird. Es versteht sich von selbst, dass dergleichen Urtheile des Auges desto sicherer werden, je mehr Hülfsmittel gegeben sind.

Ich werde jetzt Erscheinungen ähnlicher Art bei den Linsen

nachweisen, wo sie von grosser practischer Bedeutung sind. Man nehme ein convexes Glas, am besten ein biconvexes, gleichviel ob von grosser oder kleiner Brennweite, halte dasselbe nahe ans Auge, und betrachte dadurch ein Object, z. B. gerade Linien. Sie werden concav erscheinen, d. h. mit ihren Enden sich dem Glase zuwenden und zwar in beträchtlichem Grade. Es ist dies bekanntlich ein Mittel, Zeichnungen zu betrachten, um die Perspective zu vermehren; ein Mittel, welches die gewöhnliche sphärisch gekrümmte Linse auch liefert, während man doch glauben sollte, dass in den meisten Fällen der Praxis cylindrische Linsen der Aufgabe besser genügen würden. Denn die sphärischen Linsen krümmen nicht allein die horizontalen Linien, welches gewünscht wird, sondern begreiflich auch die verticalen, was man im Allgemeinen nicht beabsichtigt, und durch cylindrische Linsen, mindestens zum Theil, wenn auch nach dem Obigen nicht ganz, vermieden wird. Uebrigens kann dieser Effect der Linsen fast bis zum Unerträglichen gesteigert werden, wenn man eine doppelt convexe Loupe von kleiner Brennweite und verhältnissmässig grosser Apertur gebraucht. Betrachtet man durch dieselbe eine Papierfläche, so sieht man von einem gewissen Umkreise ab die kleinen Erhöhungen des Papiers wie Fäden beinahe senkrecht aufgerichtet.

Entfernt man jetzt die convexe Linse vom Auge bis sie ein Bild giebt, welches man in der Luft betrachtet, so erscheint dasselbe convex, also umgekehrt wie in dem vorhergehenden Fall, und zwar wiederum im Allgemeinen sehr entschieden. Es hat in diesem Falle gar keine Schwierigkeit, abgesehen von der mathematischen Berechnung, schon thatsächlich nachzuweisen, dass die Punkte, welche von dem Auge für die entfernteren erklärt werden, auch wirklich die entfernteren sind. Denn fängt man das Bild auf eine matte Glastafel auf, und erscheint dasselbe in denjenigen Theilen, welche der Axe der Linse nahe liegen, bei einer gewissen Entfernung deutlich, so wird man die Glastafel der Linse näher bringen müssen, um die von der Axe der Linse entfernten Theile möglichst deutlich zu sehen. Da man das Bild der camera obscura in einer bestimmten Entfernung braucht, so ist diese Differenz zwischen den centralen und peripherischen Theilen ein Uebelstand, von dem jedes Instrument dieser Art hinlängliche Beweise giebt.

Die concave Linse zeigt ähnliche Erscheinungen. Gerade Linien, durch sie betrachtet, zeigen sich convex, d. h. mit ihren entfernteren Theilen von der Linse abgewendet.

Sehr zu beachten sind in dieser Beziehung die Gläser, welche auf der einen Seite plan sind oder überhaupt einen grösseren Radius der Krümmung haben. Wendet man eine planconvexe Linse als Loupe an, so lehrt die Theorie, dass man die ebene Seite dem Object und also die gekrümmte dem Auge zuwenden müsse. Denn die Theorie berücksichtigt zwei Fehler der Linsen, die chromatische und die Abweichung wegen der sphärischen Krümmung. Für die erstere ist es gleichgültig, ob man die Linse nach der einen oder der andern Seite richtet; was jedoch die Längenabweichung betrifft, so zeigt die Theorie, dass sie beinahe viermal grösser ist, wenn man die convexe Seite dem Object und die plane dem Auge zuwendet, als bei umgekehrter Stellung. Somit müsste man die planconvexen Loupen mit der ebenen Seite nach dem zu betrachtenden Gegenstand gebrauchen.

Das jedoch fällt keinem Beobachter ein; er hält die Loupe stets umgekehrt!

Sollte noch ein Zweifel hierüber obwalten, so betrachte man die Stellung eines planconvexen Oculars, durch welches ein Bild, sei es im Fernrohr oder Mikroscop, gesehen wird. Man wird stets die gekrümmte Seite dem Bilde zugekehrt finden.

Die Theorie der Abweichung der Lichtstrahlen wegen der Kugelgestalt ergiebt ferner, dass es vortheilhafter sei, sich einer biconvexen Linse gleicher Krümmung zu bedienen, als einer planconvexen, deren ebene Seite den parallelen Strahlen ausgesetzt sei. Hierüber ist die Theorie eben so wenig mit der Erfahrung übereinstimmend, wie nicht allein sämmtliche Oculare sondern auch die camera obscura zeigt. Somit ist es gewiss, dass in der Theorie ein Umstand übersehen sein muss, wodurch der Widerspruch hervorgebracht wird.

Um diesen Umstand kennen zu lernen, wollen wir die planconvexen Linsen mit Rücksicht auf den vorliegenden Gegenstand untersuchen. Sie zeigen dieselben Erscheinungen, als die biconvexen Gläser, mögen sie als Loupen oder zum Hervorbringen eines Bildes angewandt werden; allein sie zeigen sie in sehr verschiedenem Maasse, je nachdem die eine oder andere Seite dem Object zugewandt wird. Wenn sie als Loupe dienen, so sind die

Krümmungen ungleich bedeutender, sobald die plane Seite nach dem Object gerichtet ist; lässt man durch sie jedoch ein Bild entstehen, so ist dasselbe stärker gewölbt, wenn die convexe Seite nach dem Bilde sieht. Aus der ersteren Thatsache, die man practisch wohl zu beachten hat, ergiebt sich die Lage, in welcher diese Linse angewandt werden muss, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Zugleich überzeugt man sich, dass unter allen Umständen der Theil des Bildes, welcher die Axe der Linse umgiebt, ungekrümmt und unverzerrt bleibt, und dass diese Verzerrungen von den höheren Gliedern abhängen, die man bei der gewöhnlichen Betrachtung der Linse vernachlässigt, d. h. von solchen Punkten, welche mit der Linse einen zu grossen Winkel bilden, als dass man ihn für unendlich klein ansehen könnte.

Aehnlich der planconvexen verhält sich die planconcave Linse. Sieht man durch sie hindurch, so krümmt sie die geraden Linien in verschiedenem Grade, je nachdem sie gehalten wird. Sie krümmt am wenigsten, wenn die plane Seite nach dem Object gerichtet ist, und in dieser Stellung wird diese Linse als Brillenglas angewandt.

Fasst man das Bisherige zusammen, so ergiebt sich also:

1) dass die Punkte des Objects sich desto früher abbilden, je weiter sie von der Axe entfernt sind. Wir setzen voraus, dass das Object sich in einer Ebene befinde, welche senkrecht auf die Axe gerichtet ist. Sein Bild wird sich dann also nicht in einer Ebene befinden, vielmehr werden die entfernteren Theile davon abweichen, und diese Abweichung könnte man die Abweichung von der Ebene nennen.

2) dass diese Abweichung bei einer Linse mit ungleichen Radien von der Stellung der Linse abhänge.

3) dass der Uebelstand, der hieraus hervorgeht, bei den Loupen und Ocularen bedeutender ist, als die Abweichung wegen der Kugelgestalt, welche von der Apertur bedingt ist, so dass, wenn beide Abweichungen collidiren, die Entscheidung nach den Bedingungen der Abweichung ad 1. von der Praxis getroffen wird.

4) dass weil man die in Rede stehende Abweichung, so viel bekannt,*) niemals in Betracht gezogen hat, die Theorie der

---

*) Ich muss mir die Bemerkung erlauben, dass dieser Abschnitt und

dioptrischen Instrumente in Widerspruch mit der Praxis getreten ist, und diesen Instrumenten wahrscheinlich die Vollendung nicht hat geben lassen, die zu erreichen möglich gewesen wäre. Merkwürdig ist es übrigens, dass man den Widerspruch der Theorie mit der Praxis bei den Loupen und Ocularen nicht hervorgehoben hat, da er zu Tage liegt.

Was die Objectivlinsen anbetrifft, so ist zu bemerken, dass bei der des Mikroscops beide Arten von Abweichung dieselbe Stellung der Linse verlangen, nemlich mit der convexen Seite nach dem Object, mit der planen oder der weniger gekrümmten nach dem Bilde. Bei den Objectiven der Fernröhre dagegen ist die convexere Seite nach dem Object gewandt, und dies rührt daher, dass diese Instrumente im Allgemeinen ein kleines Gesichtsfeld haben, wo dann die Abweichung von der Ebene nicht so bedeutend ist; ferner daher, dass die letztere Abweichung unter sonst gleichen Umständen desto kleiner wird, je grösser die Entfernung des Objects. Daher steht die Objectivlinse der Fernröhre, wie es die Abweichung wegen der Kugelgestalt nöthig macht. Inzwischen sieht man auch bei Fernröhren von verhältnissmässig grösserem Gesichtsfeld den Mond nicht als Scheibe, sondern gewölbt und man kann wohl nicht zweifeln, dass wenn die Theorie den aufgestellten Gesichtspunkt beachten wird, sie den Fernröhren eine grössere Vollkommenheit, namentlich in Bezug auf das Gesichtsfeld wird ertheilen können.

Uebrigens ist nicht zu vergessen, dass wir es hier mit dioptrischen Prinzipien nicht zu thun haben, dass wir nur beabsichtigen, zu zeigen, wie ein Auge allein durch die Adaptirung den relativen Ort der Objecte erfahre, und somit bleibt uns nur nachzuweisen übrig, dass die Krümmungen ebener Gegenstände, zu welchen die Linsen Veranlassung geben, auch wirklich in der Natur ihrer Brechung liege, und dass das Auge somit richtig beurtheile.

Seien r und ϱ die Radien einer Linse; wir nehmen dieselben positiv, wenn sie zu einer convexen Fläche gehören. d die Dicke der Linse, n das Brechungsverhältniss ihrer Substanz.

überhaupt der ganze Artikel bereits 1841 geschrieben worden ist, als dieser Band des Repertoriums erscheinen sollte.

In dem Abschnitt „Weg der Lichtstrahlen u. s. w.“ findet sich die Gleichung (III)

$$\varphi_i = (4i + 3,a)\,w,$$

wo w der Winkel ist, den der noch ungebrochene Strahl mit der Axe bildet; φ_i derselbe Winkel nach der Brechung durch i + 1 Linsen. a ist die Entfernung von der vordersten Linsenfläche, wo der noch ungebrochene Strahl die Axe treffen würde. Hat man nur eine Linse, so ist i = o, und die letzte Gleichung geht über in:

$$\varphi = (3,a)\,w.$$

Wenn die Bedingung gestellt wird, dass der Strahl nach seinem Austritt aus der Linse seiner ursprünglichen Richtung parallel sei, so muss $\varphi = w$, also $(3,a) = 1$ sein. Nennt man A den dieser Bedingung entsprechenden Werth von a, so ergiebt sich

$$A = \frac{1 - (3.2)}{(3,1)}.$$

Dieser Werth A giebt die Lage des ersten Hauptpunkts der Linse, und wir fügen noch bei, dass man nach der im angeführten Abschnitt gebrauchten Bezeichnung hat

$$(3) = \frac{n-1}{\varrho},$$

$$(2) = -\frac{d}{n},$$

$$(1) = \frac{n-1}{r},$$

wonach man A leicht berechnet.

Der Strahl, welcher die Axe in einer Entfernung A, von der ersten Fläche gemessen, treffen würde, geht also nach der Bechung durch die Linse seiner ursprünglichen Richtung parallel. Er wird dann die Axe in einer Entfernung B von der hintern Linsenfläche treffen, und diese Entfernung erhält man offenbar, wenn man in dem Werthe von A,r mit ϱ vertauscht.

Daher ist
$$B = \frac{1 - (2,1)}{(3,1)}.$$

Der so gefundene Punkt ist der andere Hauptpunkt der Linse.

Da diese beiden Hauptpunkte von grosser Wichtigkeit bei der Betrachtung der Linse sind, so wollen wir ihre Lage auf eine andere Art noch abzuleiten suchen. Es giebt bekanntlich für jede Linse einen Punkt in der Axe, welcher die Eigenschaft hat, dass wenn ein Lichtstrahl durch ihn hindurchgeht, er nach der Brechung durch die

Linse denselben Winkel mit der Axe bildet als zuvor. Bei einigen Schriftstellern heisst dieser Punkt der optische Mittelpunkt, und Strahlen, die durch ihn gehen, Hauptstrahlen. Man erhält ihn, wenn man an die Flächen der Linse zwei parallele Radien zieht und die Punkte, wo sie die beiden Oberflächen treffen, durch eine Gerade verbindet. Der Durchschnitt dieser Geraden mit der Axe der Linse ist der verlangte Punkt, und man sieht hieraus sogleich, dass derselbe um $d \cdot \frac{r}{r+\varrho}$ von der Vorderfläche und um $d \cdot \frac{\varrho}{r+\varrho}$ von der hinteren entfernt liegt.

Der so bestimmte Punkt geniesst seine Eigenschaft ganz allgemein, d. h. für alle Strahlen, sie mögen unter grossem oder kleinem Winkel einfallen. Da alle sogenannten Hauptstrahlen durch ihn gehen, so kann man ihn, optisch genommen, als einen leuchtenden Punkt ansehen, und die Brechung der von ihm ausgehenden Strahlen durch die beiden Linsenflächen bestimmen. Dies geschieht nach der bekannten Formel $\frac{1}{\alpha} = \frac{n}{a} - \frac{n-1}{r}$, wo a die Entfernung des Objects, α die des Bildes ist, beide von der brechenden Oberfläche nach derselben Seite hin gemessen. Setzt man hierin nunmehr für a die Entfernung des optischen Mittelpunkts oder $d \cdot \frac{r}{r+\varrho}$, so erhält man für α die Entfernung des ersten Hauptpunkts, das obige A; und wenn man r mit ϱ vertauscht, die Entfernung des zweiten Hauptpunkts oder B.

Auch leuchtet aus dieser Ableitung die Eigenschaft der beiden Hauptpunkte ein. Denn zieht man durch den optischen Mittelpunkt eine Linie, welche einen Lichtstrahl repräsentirt, und erleidet derselbe an beiden Flächen der Linse eine Brechung in der Luft, so ist jeder der beiden gebrochenen Strahlen auf seinen Hauptpunkt gerichtet, und dabei bilden sie gleiche Winkel mit der Axe, da sie parallel sind. Wie man sieht, ist die Gleichheit der Winkel das Charakteristische der beiden Hauptpunkte; denn sähe man von dieser Gleichheit ab, so gäbe es für jeden beliebigen Punkt in der Axe von einer oder von $i + 1$ Linsen einen anderen correspondirenden Punkt, von der Eigenschaft, dass alle Strahlen, die vor der Brechung auf den ersten Punkt gerichtet waren, von dem zweiten zu kommen scheinen, nachdem sie sämmtliche Brechungen erfahren haben, und zwar ergiebt sich

dies aus der Gleichung VII des erwähnten Abschnitts, wonach

$$d_i = \frac{(4i + 2,a)}{(4i + 3,a)},$$

also unabhängig von dem ursprünglichen Winkel w ist.

Dies Verhältniss jedoch, in welchem je zwei correspondirende Punkte in der Axe des Linsensystems zu einander stehen, gilt eben so, wie die Eigenschaft der beiden Hauptpunkte, nur für Strahlen, die mit der Axe unendlich kleine Winkel bilden. Das letztere ist aus dem Vorigen leicht zu entnehmen. Die Lage des optischen Mittelpunkts nemlich ist ganz allgemein für alle Strahlen, unter welchem Winkel sie auch geneigt seien; die Formel jedoch, durch welche wir vorher aus der Lage dieses Punktes diejenige der beiden Hauptpunkte ableiteten, gilt nur für Strahlen, deren Winkel mit der Axe unendlich klein sind. Hieraus ergiebt sich, dass die Hauptpunkte einer Linse nur für Strahlen der letzteren Art gelten.

Die letzte Gleichung zwischen α_i und a geht für den Fall einer einzigen Linse über in

$$\alpha = \frac{(2,a)}{(3,a)}$$

$$= \frac{a\,(2,1) + (2)}{a\,(3,1) + (3,2)},$$

wo α die Entfernung von der hinteren Linsenfläche bedeutet, in welcher der gebrochene Strahl die Axe trifft.

Befindet sich nun ein leuchtender Punkt in der Axe und um a vor der ersten Fläche, so hat man in der letzten Gleichung a negativ zu nehmen, und erhält für die Entfernung seines Bildes die Gleichung

$$\alpha = \frac{(2) - a\,(2,1)}{(3,2) - a\,(3,1)} \ldots \mathrm{XII}.$$

Nimmt man an, dass paralleles Licht auf die Vorderfläche falle, so ist $a = \infty$, und daher

$$\alpha = \frac{(2.1)}{(3,1)} \text{ als die eine Brennweite.}$$

Fällt paralles Licht auf die hintere Fläche der Linse, so ist $\alpha = \infty$, und auf ähnliche Weise

$$a = \frac{(3,2)}{(3,1)} \text{ als die andere Brennweite.}$$

Die beiden Brennweiten liegen also von den entsprechenden

Flächen gemessen, verschiedentlich entfernt; allein ihre Entfernung von den entsprechenden Hauptpunkten, welche vorher bestimmt worden sind, ist dieselbe und zwar $\frac{1}{(3,1)}$. Bezicht man nun auch die Entfernung des Objects und diejenige des Bildes auf den correspondirenden Hauptpunkt, so erhält man die gewöhnliche Formel für die sphärische Linse, wonach die Summe der reziproken Grössen der Entfernung des Objects und Bildes, der reziproken Brennweite gleich ist, d. h. $= (3,1)$. Diesen Satz hat Möbius über ein System von beliebig vielen Linsen aufgestellt, und Bessel hat ihn für den Fall bewiesen, in welchem die Dicke der Linsen nicht vernachlässigt wird.

Setzt man in XII $a = o$, setzt man also voraus, dass der leuchtende Punkt die Linse und zwar an ihrer Axe berühre, so erhält man

$$\alpha = \frac{(2)}{(3,2)} = \frac{d : n}{\frac{n-1}{\varrho} \cdot \frac{d}{n} - 1},$$

und wenn man diesen Werth von d, oder der Linsendicke, abzieht, so ergiebt sich die Verschiebung, welche der leuchtende Punkt erfährt, und welche bewirkt, dass er einem darüber schwebenden Auge gehoben erscheint.

Es mag nun der bisher in der Axe angenommene leuchtende Punkt sich ausserhalb derselben befinden; seien x und y die Coordinaten desselben, wo x dieselbe Bedeutung hat als vorher a, y jedoch die senkrecht gemessene Entfernung des Punktes von der Axe bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass auch für die Strahlen dieses Punkts die Winkel als unendlich kleine angesehen werden. Unter dieser Bedingung kennt man sogleich die Lage eines von der Linse gebrochenen Strahles, desjenigen nemlich, welcher vor der Brechung auf den ersten Hauptpunkt gerichtet ist. Er wird nach der Brechung auf den zweiten Hauptpunkt gerichtet sein, und zwar unter demselben Winkel, welcher aus den Grössen x und y und aus der Lage des ersten Hauptpunkts als bekannt anzusehen ist. Um den Ort des Bildes zu erfahren, ist die Lage eines zweiten gebrochenen Strahls zu wissen nöthig dessen Durchschnittspunkt mit dem ersteren, für den Fall unendlich kleiner Winkel den Ort des Bildes bedeutet. Wählt man hierzu den Strahl, der auf den Axenpunkt der vorderen Linsen-

fläche gerichtet ist, so ist der Winkel, den er mit der Axe vor der Brechung bildet, oder $w = \frac{y}{x}$, und dieser Strahl wird, dem Obigen zufolge, nach der ersten Brechung auf einen Punkt in der Axe gerichtet sein, der um die Grössen $\frac{(2)}{(3,2)}$ von der hinteren Fläche der Linse entfernt liegt. Nach der zweiten Brechung bilde der Strahl den Winkel φ mit der Axe, so hat man nach früheren Gleichungen $\varphi = (3,a)\,w$, und da hier $a = 0$, so ist wegen der Natur der Ausdrücke unter der Klammer $\varphi = (3,2)\,w$.

Nennt man nunmehr x_1 und y_1 die Coordinaten des Punktes, wo beide Strahlen sich schneiden und also unter der gemachten Voraussetzung, der leuchtende Punkt sich abbildet, so ergiebt sich leicht

$$x_1 = \frac{(2) - (2,1)\,x}{(3,2) - (3,1)\,x}.$$

Wie man sieht, ist dieser Werth von x_1 nur von x abhängig, aber nicht von y. Er bleibt also ungeändert, der leuchtende Punkt liege nun in der Axe oder ausserhalb, wenn nur x dasselbe bleibt. Man kann dies Resultat auch so ausdrücken: Wenn als Object ein System von Punkten gegeben ist, die sich in einer und derselben Ebene, senkrecht auf der Axe der Linse, befinden, dann werden die Bilder dieser Punkte gleichfalls in einer und derselben Ebene liegen, die senkrecht auf der Axe gerichtet ist.

Somit ist hier noch nichts von einer Krümmung des Bildes, wie die Erfahrung sie uns vorher an den Linsen gezeigt hat. Allein das Vorige gilt nur für Objecte von so geringer Ausdehnung, dass die Annahme unendlich kleiner Winkel gestattet ist, und für so kleine Objecte lässt auch das Experiment keine Krümmung wahrnehmen. Anders jedoch verhält sich die Sache, wenn man das Gesichtsfeld grösser annimmt, so das man für den Winkel, den dasselbe umschliesst, die Voraussetzung unendlich kleiner Winkel aufgeben muss. Die interessantere von den im Obigen besprochenen Erscheinungen bietet die planconvexe Linse dar, und ich werde an einer bestimmten, mir vorliegenden Linse dieser Art zeigen, dass dasjenige, was das Auge über die Krümmung, über die verschiedene Krümmung, je nachdem die Linse gehalten wird, behauptet, vollkommen begründet sei, und dass das-

kleinen Variationen δn und δe wähle, so muss der Ausdruck $z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ unveränderlich sein; denn wäre er es nicht, so könnte man jedenfalls, ohne die Grenzcurve P zu ändern, also $\delta e = 0$ setzend, die Variationen δn so wählen, dass δW einen negativen Werth erhielte. Ist aber $z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = C$, so wird, weil $\int dU . \delta u = 0$, $\delta W = -\int dP . \delta e . \cos k \left\{\alpha^2 \cos i + 2\beta^2 - \alpha^2\right\}$, und da $\delta e . \cos k$ immer noch ganz willkührlich bleibt, so muss, wenn δW nicht negativ soll werden können, $\alpha^2 \cos i + 2\beta^2 - \alpha^2 = 0$ oder $\sin \frac{1}{2} i = \frac{\beta}{\alpha}$ sein. Lässt man die z in der horizontalen Normal-Fläche anfangen (d. h. in der Ebene, welche die Oberfläche der Flüssigkeit bilden würde, wenn keine Capillar-Anziehung Statt fände), so wird die obige Constante $C = 0$, und man erhält für die Oberfläche folgende Gleichungen:

$$z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = 0 \text{ und } \sin \tfrac{1}{2} i = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Die Constanten α und β hängen von den Functionen f und F ab, und können als ein Maass der Intensität der Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit unter sich und gegen die Theile des Gefässes betrachtet werden. Wenn $\beta > \alpha$, also die Anziehung des Gefässes gegen die Flüssigkeit grösser ist, als die Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit, so kann die Gleichung $\alpha \sin \frac{1}{2} i = \beta$ nicht bestehen. In diesem Falle giebt es keine bestimmte Gestalt des Gleichgewichtes; denn denkt man sich neben der Flüssigkeit noch eine sehr dünne Schicht über einen Theil der Wand, dessen Fläche T′ sei, ausgebreitet, so ist T′ die Zunahme der bedeckten Oberfläche T und zugleich erleidet auch die freie Oberfläche U nahe dieselbe Zunahme T′. Der Ausdruck $W = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\, T + \alpha^2\, U$ verwandelt sich dann in folgenden, der desto genauer ist, je dünner die hinzugefügte Schicht, nämlich $W' = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\, (T + T') + \alpha^2\, (U + T')$, und da das Integral $\int z ds$ in beiden nahe denselben Werth vorstellt, so wird $W' - W = 2(\alpha^2 - \beta^2)\, T'$, also da $\beta^2 > \alpha^2$, $W' < W$, also wird durch die Annahme einer weiteren Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Wand des Gefässes, W vermindert. Ist aber die ganze Wand des Gefässes mit einer unmerklich dünnen Schicht der Flüssigkeit benetzt, so kann man in den Gleichungen für die Oberfläche $\beta = \alpha$ setzen, indem alsdann die benetzende Schicht als Oberfläche der Wand sich ansehen lässt. Alsdann wird $\sin \frac{1}{2} i = 1$,

oder $i = \pi$; also berührt die freie Oberfläche der Flüssigkeit die Wand des Gefässes.

Die gefundenen Resultate setzen völlig freie Beweglichkeit der flüssigen Theilchen voraus. Diese findet im Innern der Flüssigkeit und an ihrer freien Oberfläche viel mehr statt, als an der Wand des Gefässes, wenn diese trocken ist. Die freie Oberfläche wird daher unter allen Umständen eine der Gleichung $z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = C$ entsprechende Gestalt haben, wenn die Flüssigkeit in Ruhe ist: aber die andere Bedingung für die Grenze braucht noch nicht erfüllt zu sein, weil, wenn die erste Bedingung erfüllt ist, der Uebergang zum Minimum von W nicht ohne Verschiebung der an der Wand befindlichen Theilchen geschehen kann, welcher die Reibunng Widerstand leistet. Man bemerkt daher bei benetzten Wänden grössere Uebereinstimmung der Erscheinungen mit obigen Formeln, als bei trocknen, weil an jenen die Theile der flüssigen Masse leichter fortgleiten, als an diesen.

Aus Beobachtungen an benetzten Gefässen lässt sich der Werth von α herleiten. Nach den Versuchen von Laplace ergiebt sich für Wasser bei der Temperatur von $8^\circ{,}5$ Cent. $\alpha = 2{,}7509$ Millim., für Weingeist vom specifischen Gewichte 0,81961, $\alpha = 1{,}7447$ Mm., für Terpentinöl bei 8° C. $\alpha = 1{,}818$; für Quecksilber bei 10° C. $\alpha = 1{,}803$. Die Temperatur scheint auf die Werthe von α nur in so weit Einfluss zu haben, als sie die Dichte der Flüssigkeit ändert, welcher der Werth von α^2 proportional ist.

Wir besitzen noch eine Bearbeitung dieses Gegenstandes in der Nouvelle théorie de l'action capillaire par S. D. Poisson, Paris 1831, welche sich besonders durch genaues Eingehen in viele einzelne Erscheinungen auszeichnet, einen zusammenfassenden Auszug aber nicht leicht gestattet; daher ich mich hier nur auf eine Bemerkung über die Polemik, welche der berühmte Verfasser gegen die bisherige Theorie richtet, beschränken will. Poisson tadelt nämlich, dass man die Aenderung nicht in Rechnung gebracht habe, welcher die Dichtigkeit des flüssigen Körpers an seiner Oberfläche und im Innern unterworfen sei, und behauptet, dass, wenn dieselbe vernachlässigt wird, die freie Oberfläche eben und wagerecht bleiben und weder Hebung noch Senkung der Flüssigkeit eintreten werde (vgl. z. B. S. 6 der Vorrede). Der Beweis für diese der bisherigen Theorie widersprechende Behauptung geht von folgender Betrachtung aus (S. 18 u. f.):

Es sei AOB (Fig. 3.) die freie Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre AA′B′B, ω ein Element derselben in O, OE ein flüssiger Cylinder normal auf der Fläche, dessen Grundfläche ω; CD sei die Berührungs-Ebene der Fläche in O; O′ ein beliebiger Punkt des Cylinders in der verticalen Tiefe $= \alpha$ unter O, und C′D′ eine durch O′ gehende mit CD parallele Ebene. Auf diesen Cylinder OO′ wirken in der Richtung von O nach O′ folgende Kräfte: die Anziehung des Meniscus, welche mit μ bezeichnet und gefunden wird $\mu = -\frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$, wo λ und λ' die Krümmungshalbmesser sind, die für eine concave Oberfläche als positiv angesehen werden. Die Constante H hängt von der Anziehung φr zwischen den Theilen der Flüssigkeit ab, und findet sich: $H = \frac{1}{4} \pi \varrho^2 \int_0^\infty r^4 \varphi r \, dr$, ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit, auf deren Veränderung hier keine Rücksicht genommen wird. Ferner wirkt auf den Cylinder die Anziehung der unter C′D′ befindlichen Flüssigkeit; ihre Intensität wird gefunden $K = \frac{2 \pi \varrho^2}{3} \times \int_0^\infty r^3 \varphi r \, dr$; die Wirkung der zwischen CD und C′D′ enthaltenen, den Cylinder umgebenden Flüssigkeit, in der Richtung OO′, ist Null; es wirkt noch das Gewicht des Cylinders OO′, nach der Richtung desselben gemessen, mit der Intensität $g \varrho \alpha$, endlich noch der Luftdruck Π in O. Alle diese Kräfte sind auf die Flächeneinheit zurückgeführt. Poisson sagt, für das Gleichgewicht des Cylinders OO′ müsse die Summe dieser Kräfte Null sein, und erhält dann folgende Gleichung: $K + \mu + g \varrho \alpha + \Pi = 0$ oder $K = - \Pi - g \varrho \alpha + \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right)$ (S. 19.), auf welche dann weitere Betrachtungen gegründet werden.

Die Annahme einer unveränderlichen Dichtigkeit, mit welcher die frühere Theorie sich begnügt hatte, würde durch vorstehende Gleichung unmittelbar widerlegt sein, wenn diese wirklich aus jener folgte. Denn da sich α auf einen beliebigen Punkt O′ des Cylinders OE bezieht, indem es den verticalen Höhen-Unterschied zwischen O und O′ bedeutet, so ist es eine willkührliche oder veränderlichen Grösse; hingegen sind die übrigen in der Gleichung vorkommende Grössen entweder absolut constant, wie K, H, Π, g, ϱ, oder wenigstens für denselben Cylinder OE constant, wie λ und λ'; folglich würde sich aus dieser Gleichung ein constanter Werth für α ergeben, welcher offenbar unzulässig ist. Auch betrachtet

Poisson den Werth von α in dieser Gleichung als willkührlich, indem er aus ihr den Schluss zieht, dass K eine im Allgemeinen negative Grösse sei, welche hauptsächlich vom Drucke Π und von der Tiefe des Punctes O' abhänge, dem sie entspricht. Also wäre dann K veränderlich, da doch sein Werth konstant und schon vorher angegeben ist. Ganz dieselbe Einwendung lässt sich auch gegen eine im weiteren Verlaufe S. 20. Z. 8. v. u. aufgestellte Gleichung machen. Der innere Widerspruch, welchen hiernach diese Gleichungen darbieten, scheint lediglich in einer mangelhaften statischen Betrachtung seinen Grund zu haben, denn für das Gleichgewicht des Cylinders ist nicht erforderlich, dass die Summe der oben aufgezählten von O nach O' gerichteten Kräfte, nämlich $K + \mu + g\varrho\alpha + \Pi$ gleich Null sei, sondern nur, dass sie dem Gegendruck gleich sei, welcher in O' auf die flüssige Säule wirkt. Poisson scheint anzunehmen, dass ein solcher Gegendruck aus der bisherigen Theorie sich nicht ergeben, weil derselbe das Dasein einer abstossenden Kraft voraussetzt, während die Theorie nur anziehende Kräfte annimmt; wobei jedoch unberücksichtigt geblieben ist, dass die Annahme einer constanten Dichtigkeit die Voraussetzung einer abstossenden Kraft schon in sich einhüllt. So viele Anerkennung daher der von Poisson gemachte Versuch verdient, jene Annahme constanter Dichtigkeit durch Einführung passender Hypothesen über die zwischen den Molecülen wirkenden abstossenden Kräften nicht allein zu ersetzen, sondern auch darbüber hinauszugehen, und die durch den veränderlichen Druck hervorgebrachten Aenderungen der Dichtigkeit, welche die bisherige Theorie wegen der geringen Compressibilität der tropfbaren Flüssigkeit bei der Erklärung der Capillaritäts-Erscheinungen unberücksichtigt liess, ebenfalls noch in die Rechnung einzuführen, so kann doch die Behauptung, dass aus der bisherigen Theorie die Erscheinungen der Capillarität gar nicht folgen, nicht als begründet anerkannt werden.

---

6. Ueber das Gleichgewicht eines an einem Faden hängenden und in gleichförmige Drehung versetzten Körpers.

Eine Beobachtung Gregory's, von welcher im 3. Bande der Correspendance mathématique et physique de Bruxelles die Rede

selbe also den relativen Ort der gesehenen Punkte richtig beurtheile.

Es sei demnach eine planconvexe Linse von einem Radius r = 7 Linien, von einer Dicke = 2‴ und einem Werthe von n = 1,53. Die Oeffnung der Linse setze ich absichtlich so klein (= $\frac{1}{25}$stel Linie), dass die Abweichung wegen der Kugelgestalt ganz unerheblich sei. In der Axe der Linse und 63‴ von ihrer Vorderfläche entfernt, befinde sich ein leuchtender Pnnkt, so wird die Entfernung seines Bildes nach den vorigen Formeln betragen:

15‴,404, wenn die convexe Seite dem Object zugewandt ist.
16‴,621 - - plane - - - - -

Es befinde sich nun ein zweiter leuchtender Punkt vor der Linse, dessen Coordinaten x und y respective 63‴ und 10‴ betragen, so dass dieser Punkt also mit dem vorigen in einer und derselben senkrecht auf der Axe gerichteten Linie liege, und mit dieser Axe an der Vorderfläche einen Winkel von 9° 1′ 10″ bilde, für welchen die Annahme des Unendlich kleinen nicht erlaubt ist. Nimmt man von diesem leuchtenden Punkt zwei Strahlen, den einen gerichtet auf die vordere Fläche der Linse, da wo sie die Axe trifft, den zweiten auf einen um 0‴,25 entfernteren Punkt (welches der letzte Strahl ist, der von der vorderen Fläche noch gebrochen werden könnte) und führt man die Rechnung nach den strengen Formeln, so erhält man x, oder die Coordinate des abgebildeten Punktes von der hinteren Fläche der Linse gemessen:

14‴,468, wenn die convexe Seite der Linse nach dem Object gekehrt ist,
15,966, wenn die plane Seite der Linse nach dem Object gekehrt ist.

Hieraus ergiebt sich also, dass dieser Punkt ausserhalb der Axe sich in beiden Lagen, der Linse näher abbilden wird, als der Punkt in der Axe selbst, und dass folglich die geraden Linien im Bilde sich so krümmen werden, wie die Erfahrung es zeigt, und das Auge es beurtheilt.

Es folgt zweitens, dass bei der einen Stellung der Linse, wenn nemlich die convexe Seite nach dem Object gekehrt ist, die Krümmung der abgebildeten geraden Linie stärker sein wird, als in der entgegengesetzten Lage. In dem ersteren Fall ist nemlich die Differenz der Bildweiten beider Punkte 0‴,936, während

dieselbe bei der entgegengesetzten Stellung der Linse nur 0''',655 beträgt.

Diese Resultate bleiben dem Wesentlichen nach ungeändert, wenn das Object entfernter angenommen wird; allein die Unterschiede sind dann nicht so bedeutend. Steht die convexe Seite dem Object zugewandt, und ist dasselbe ein unendlich entfernter Punkt in der Axe, so findet man für die vorige Linse die Entfernung des Brennpunkts 11''',90.

Bildet der leuchtende Punkt, wie vorher mit der Axe den Winkel 9° 1′ 10″ und ist derselbe wiederum unendlich entfernt, so findet man für x_1 den Werth 11'''35. Somit beträgt der Unterschied der Brennweiten 0''',55, wenn die convexe Seite die parallelen Strahlen empfängt; sie beträgt dagegen nur 0'',43 (=13''',21—12,78) wenn die ebene Seite nach dem strahlenden Punkt hinweist.

Wie man sieht, ist die Krümmung der ebenen Objecte im Bilde einer und derselben Linse, desto unmerklicher, je weiter das Object von der Linse sich entfernt, obgleich der Gesichtswinkel derselbe bleibt; ferner ist auch der Unterschied der Krümmung, je nachdem die Linse gehalten wird, unbedeutender bei den entfernteren Gegenständen. Daher kömmt, dass bei den Objectivlinsen der Fernröhre, wenn sie planconvex sind, die convexe Seite nach Aussen gewandt werden kann.

Wir sind nunmehr zu dem Punkt gelangt, wohin wir diese Untersuchung zu führen beabsichtigten. Ein einziges Auge genügt also der Aufgabe, den relativen Ort der gesehenen Objecte zu bestimmen, und daher das Relief zu beurtheilen. Es benutzt dazu die Adaptirung, und daher kann man das Vorhergehende auch als einen Beweis für diese Thätigkeit ansehen, die man dem Auge so häufig hat absprechen wollen. Ja nicht bloss dieser Thätigkeit bedarf es, sondern auch des Bewusstseins darüber, sonst wird man die besprochenen Thatsachen nicht erklären. Eine Schwierigkeit scheint bei der Adaption vorhanden zu sein, nämlich die Sicherheit zu erklären, womit das Auge sie bewirkt. Auf einen Punkt gerichtet, adaptirt es sich sehr rasch und man spürt nichts von einem Schwanken, einem Probiren, dem wir uns unterziehen müssen, wenn wir ein optisches Instrument einstellen wollen, da wir aus dem Anfangs undeutlichen Bilde nicht abnehmen, nach welcher Richtung die nothwendige Veränderung getroffen werden

muss. Allerdings ist ein einziges Auge über die relative Lage zweier Punkte, wenn ihre Entfernung sich wenig unterscheidet, unsicher; allein dann ist der Unterschied in der Adaptirung unbedeutend, und das Auge verbleibt in der Unsicherheit, wenn es nicht durch die Hülfe des anderen Auges unterstützt wird. Ist der Unterschied dagegen grösser, betrachtet man z. B. das Bild, welches eine convexe Linse giebt, dann beurtheilt das Auge ohne Schwanken die gekrümmte Gestalt von Gegenständen, die ihm sogar anderweitig als eben bekannt sind. Die Sicherheit ist in diesem Fall so gross, und die Erscheinung stellt sich jedem Auge, selbst wenn es niemals zu dergleichen Versuchen hinzugezogen worden, mit solcher Leichtigkeit dar, dass die Vermuthung erlaubt ist, die Adaptirung spiele bei der Beurtheilung des Reliefs im Allgemeinen eine wichtige, nicht bloss secundäre Rolle.

Das Myopodiorthoticon.

Unter diesem Namen hat Berthold in Göttingen ein Instrument beschrieben *), welches die Aufgabe hat, den Fehler der Kurzsichtigkeit zu verbessern. Folgende Beschreibung wird dasselbe, so viel zur Ausführung nöthig ist, erkennen lassen. An einem nach gewöhnlicher Art eingerichteten Lesepulte sind zwei aufrecht stehende Säulen befestigt, auf welchen eine horizontale Querleiste hinauf und herunter bewegt, und in einer beliebigen, mittelst einer angebrachten Skala zu messenden Entfernung, befestigt werden kann. Die Queerleiste trägt in ihrer Mitte ein Brett mit einem Ausschnitt für die Nasenwurzel, um den Kopf darauf zu legen, und die Augen in einer bestimmten Entfernung von einem auf dem Pulte liegenden Buch zu erhalten. Beträgt diese Entfernung das Maximum derjenigen, in welcher der Kurzsichtige noch bequem zu lesen vermag, und übt er dies einige Zeit, so kann er die Queerleiste nun höher stellen und so fortschreitend in immer grösseren Entfernungen lesen.

Ich habe ein solches Instrument anfertigen lassen, und sowohl an mir als einigen anderen Personen Versuche mit demselben angestellt, welche Berthold's Erfahrungen vollkommen bestätigten.

---

*) Göttinger gelehrte Anzeigen. Jahrgang 1840. Stück 66.

Namentlich ist es einem meiner Zuhörer gelungen, das Buch nach 25 Tagen schon um 14 Linien entfernter von den Augen zu halten als Anfangs. Dass aber die Kurzsichtigkeit im Allgemeinen dabei vermindert worden sei, scheint mir aus Gründen nicht wahrscheinlich, die ich anführen werde. Um hierüber messende Versuche anzustellen, hatte ich vor und während des Gebrauchs des Instruments das im Abschnitt über die Adaptirung beschriebene Instrument angewandt. Obgleich dasselbe keine grosse Genauigkeit zulässt, so konnte es doch dazu dienen, eine etwas beträchtliche Veränderung in der Güte des Auges anzuzeigen. Bei dem erwähnten Studirenden fand sich die grösste Entfernung für das Einfachsehen der Spitze, vor dem Gebrauch des Instruments = 52''',6 als Mittelwerth aus fünf Versuchen. Nach dem Gebrauch des Instruments fand sich dieselbe Entfernung an drei auf einander folgenden Tagen, und zwar wiederum im Mittel aus fünf Versuchen = 53,1 53,3 51,4.

In der Zwischenzeit war die Seheweite, wie gesagt, um 14''' grösser geworden, wovon, wie man sieht, das Optometer wenig oder nichts angiebt. Die unter sich abweichenden Werthe kommen auf Rechnung der Unsicherheit des Optometers, die sich bei der grössten Sorgfalt nicht vermeiden lässt. So ergab z. B. die eine Beobachtungsreihe folgende Werthe 52,

54,

52,5

50,5

56,5

Mittel 53,1

Nur das lehren diese Versuche am Optometer, dass die Kurzsichtigkeit, wenn überhaupt, dann doch nicht in dem Maasse abnahm, als die Leseweite grösser wurde. Es muss also einen Umstand geben, der die Leseweite zu vergrössern vermag, ohne dass gerade die Güte des Auges sich verändere, und diesen erkläre ich mir bei dem Gebrauch des Berthold'schen Instruments auf folgende Art. Das Lesen wird durch ein sehr oberflächliches, rasches Sehen bewirkt, wobei nur einzelne Buchstaben, die Form der Worte wahrgenommen, dabei Vorangehendes und selbst das, was folgt, mit berücksichtigt wird. Will man sich von diesem oberflächlichen Sehen überzeugen, so beachte man, welche ganz andere Anstrengung es erfordert, wenn man Gedrucktes für die

Correctur zu lesen hat, obgleich auch hier noch nicht das Genaueste Sehen angewandt wird. Was nun das gewöhnliche, oberflächliche Sehen anbetrifft, so ist hierin, mit Bezug auf jede Art von Objecten, eine Uebung möglich; das Auge gewinnt mehr und mehr Kennzeichen, die sein Geschäft erleichtern, wie das Jedem, der seine Sinne beachtet, hinlänglich bekannt ist. Gewöhnt man sich eine Zeit lang dieselbe Art Gedrucktes zu lesen, wie Berthold dies anräth, dann wird die Folge sein, dass man dasselbe noch leichter als Anfangs erkennt, und so wird man es bald entfernter halten können. Ich glaube, dass bei dem Gebrauch des Instruments nichts anderes eintrete, und dass, wo dieser Zweck beabsichtigt wird, es gute Dienste leisten wird.

Da jedoch der Gegenstand das Interesse so vieler Menschen berührt, so überlasse ich die Entscheidung hierüber den Sachkennern und erlaube mir noch folgende hierher gehörige Betrachtungen beizufügen.

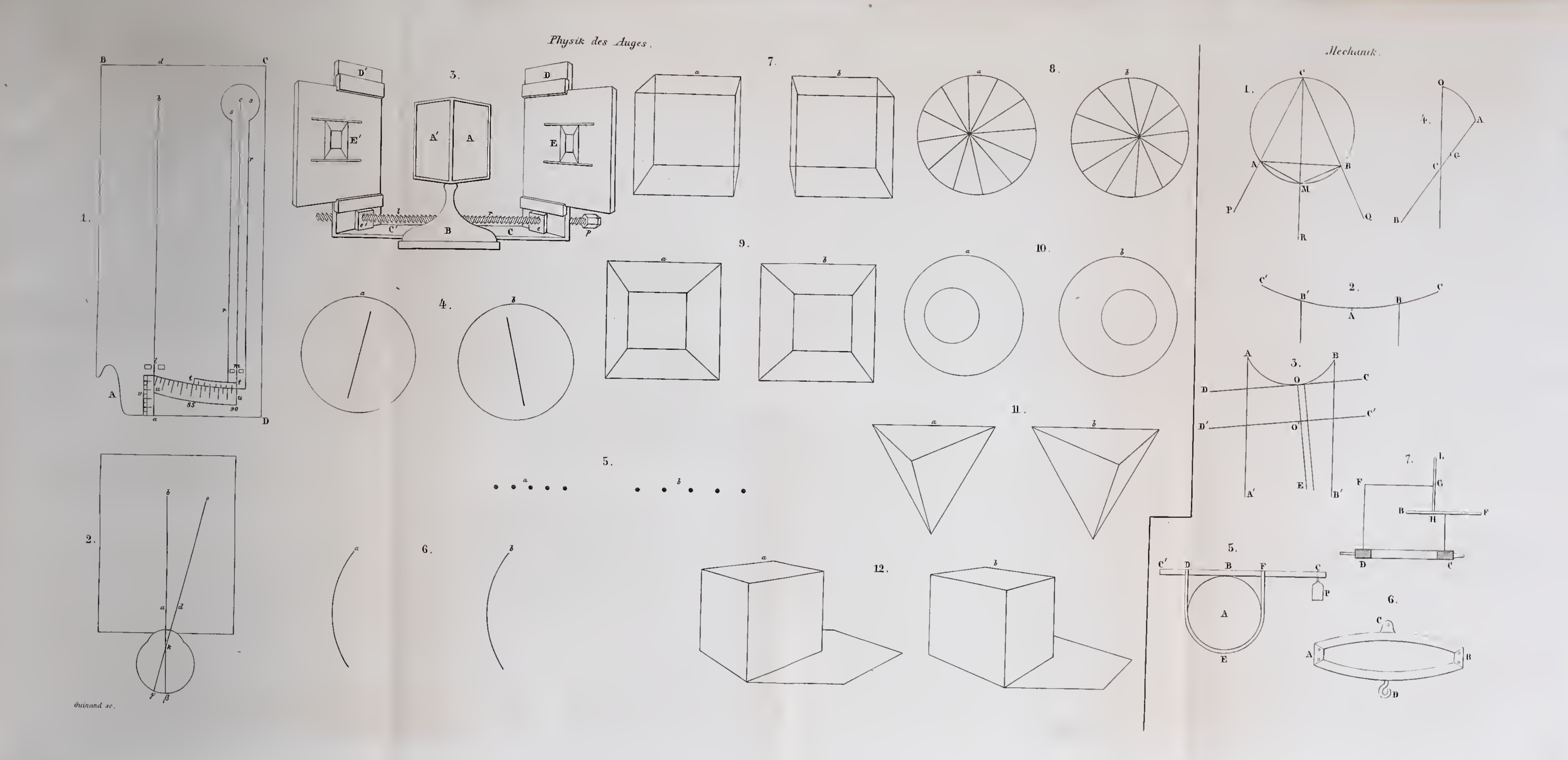
Man scheint ziemlich allgemein anzunehmen, dass die Kurzsichtigkeit durch häufiges Sehen in grosse Entfernungen gehoben oder doch vermindert werden könne, und beruft sich dabei einerseits auf Leute, wie Schiffer, Jäger, welche in grosse Entfernungen sehen, und weitsichtig sind, und andererseits auf Leute, deren Beschäftigungen in grosse Nähe vollführt werden, und welche kurzsichtig sind. So überaus häufig Erfahrungen dieser Art auch sein mögen, so hat es doch wohl noch Bedenken, ob das, was man daraus schliesst, auch wirklich daraus folge. Nach dem, was so eben über das oberflächliche Sehen und über die Uebung bemerkt worden ist, welche das Auge im Erkennen von Gegenständen sich aneignet, ist es begreiflich, dass Jemand, auch wenn er noch so geeignete Augen hat, auf der Jagd oder von entfernten Schiffen das nicht erkennen wird, was der in dergleichen Dingen Geübte mit Leichtigkeit erkennt. Etwas Aehnliches findet mit Bezug auf das Erkennen sehr naher Gegenstände statt. Dem guten Auge wird dies Anfangs nicht leicht; aber die Uebung wird auch hier viel thun; sie wird nach einiger Zeit ein Erkennen von gewissen Objecten in grosser Nähe möglich machen, obgleich das Auge hierbei nicht kurzsichtiger geworden ist. Hierzu kömmt noch eine Betrachtung, die für den vorliegenden Gegenstand nicht unberücksichtigt bleiben dürfte. Individuen, welche von ihrer Jugend an kurzsichtig sind, werden schon desshalb, und zwar mit

einiger Nothwendigkeit, auf Beschäftigung hingeführt, die in grosser Nähe vorgenommen werden, umgekehrt diejenigen, welche von Jugend auf weitsichtig sind. Wenn man folglich Beschäftigung in grosser Nähe mit Kurzsichtigkeit und Beschäftigung in grosser Entfernung mit Weitsichtigkeit begleitet sieht, so wird man sich zu hüten haben, hierbei Ursache und Wirkung nicht zu verwechseln. —

Königsberg, im October 1841.

Namenregister.

Gedruckt bei Julius Sittenfeld in Berlin, Johannisstrasse 4.



Physik des Auges.
Mechanik.
Guinand sc.






CHEMICAL SOCIETY
REFERENCE
LIBRARY
BURLINGTON HOUSE, W.

